# CAPÍTULO 06

## EQUAÇÕES DE POISSON E DE LAPLACE

**6.1) Seja o potencial no espaço livre (vácuo) expresso por** $V = 8x^2yz$ **volts.**

**a) Determinar o campo elétrico ($\vec{E}_P$) em P (2, -1, 3);**
**b) Determinar a densidade volumétrica de carga ($\rho_v$) em P;**
**c) Determinar a equação da superfície equipotencial que passa por P;**
**d) Verificar se a função V acima satisfaz a Equação de Laplace.**

Resolução:

a) Sabe -se que $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} V$ **(01)**

- Cálculo do Gradiente (coordenadas cartesianas):

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{\mathbf{a}}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{\mathbf{a}}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{\mathbf{a}}_z \Rightarrow \vec{\nabla} V = 16xyz\,\vec{\mathbf{a}}_x + 8x^2z\,\vec{\mathbf{a}}_y + 8x^2y\,\vec{\mathbf{a}}_z \quad \textbf{(02)}$$

Substituindo **(02)** em **(01)**, temos:

$$\vec{\mathbf{E}} = -16xyz\,\vec{\mathbf{a}}_x - 8x^2z\,\vec{\mathbf{a}}_y - 8x^2y\,\vec{\mathbf{a}}_z \quad \textbf{(03)}$$

Substituindo as coordenadas de **P** em **(03)**, temos o campo elétrico $\vec{\mathbf{E}}_P$:

$$\vec{\mathbf{E}}_P = [-16 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 3]\vec{\mathbf{a}}_x + [-8 \cdot 2^2 \cdot 3]\vec{\mathbf{a}}_y + [-8 \cdot 2^2 \cdot (-1)]\vec{\mathbf{a}}_z$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{E}}_P = 96\,\vec{\mathbf{a}}_x - 96\,\vec{\mathbf{a}}_y + 32\,\vec{\mathbf{a}}_z \quad \left[V/m\right]}$$

b) $$\rho_v = \vec{\nabla} \bullet \vec{\mathbf{D}} = \vec{\nabla} \bullet \left(\varepsilon_o \vec{\mathbf{E}}\right) = \varepsilon_o \vec{\nabla} \bullet \vec{\mathbf{E}} = \varepsilon_o \vec{\nabla} \bullet \left(-\vec{\nabla} V\right) \Rightarrow \rho_v = -\varepsilon_o \nabla^2 V \quad \textbf{(01)}$$

- Cálculo do Laplaciano (coordenadas cartesianas):

$$\vec{\nabla}^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \Rightarrow \vec{\nabla}^2 V = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

$$\vec{\nabla}^2 V = \frac{\partial}{\partial x}(16xyz) + \frac{\partial}{\partial y}(16xz) + \frac{\partial}{\partial z}(16xy) \Rightarrow \vec{\nabla}^2 V = 16yz + 0 + 0 \quad \textbf{(02)}$$

Substituindo as coordenadas de **P** em **(02)**, temos:

$$\vec{\nabla}^2 V = 16 \cdot (-1) \cdot 3 \Rightarrow \nabla^2 V = -48 \quad \textbf{(03)}$$

Substituindo **(03)** em **(01)**, temos:

$$\rho_V = -8{,}854 \times 10^{-12} \cdot (-48) \Rightarrow \boxed{\rho_V = 425 \quad \left[ \mathrm{pC}/\mathrm{m}^3 \right]}$$

c) O potencial em **P(2;-1;3)**,é dado por: $V_P = 8 \cdot 2^2 \cdot (-1) \cdot 3 \Rightarrow V_P = -96 \quad [V]$

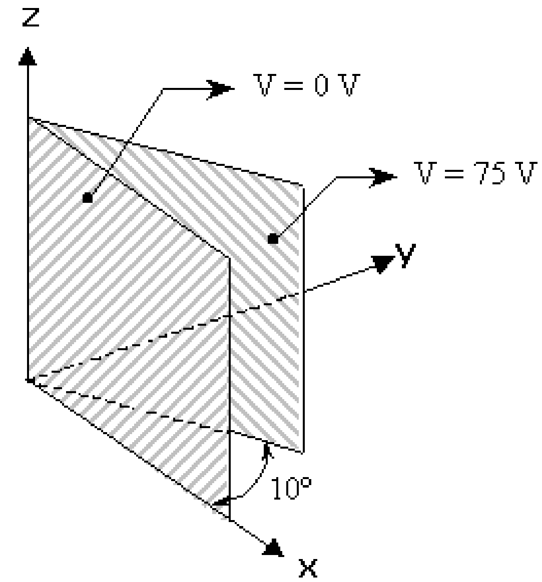
Logo, a equação da superfície equipotencial que passa por **P** é:

$$V_P = V \Rightarrow -96 = 8x^2yz \Rightarrow \boxed{x^2yz + 12 = 0}$$

d) A equação **não** satisfaz a Equação de Laplace, pois $\rho_V \neq 0$ (item **b**), indicando que a região contém cargas livres. Portanto, $\vec{\nabla}^2 V \neq 0$.

**6.2) Planos condutores em ϕ = 10º e ϕ = 0º, em coordenadas cilíndricas, possuem tensões de 75 volts e zero, respectivamente. Obtenha $\vec{D}$ na região entre os planos que contém um material para o qual $\varepsilon_R$ = 1,65.**

Resolução:




As superfícies equipotenciais para ϕ constante são planos radiais conforme mostrado na figura anterior.

Equação de Laplace: $\vec{\nabla}^2 V = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}^2 V = \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$ ; $\rho \neq 0$, pois $V = f(\phi)$.

$$\vec{\nabla}^2 V = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

Integrando pela 1ª vez:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = A$$

Integrando pela 2ª vez:

$$V = A\phi + B \qquad \textbf{(01)}$$

Condições de Contorno: $\begin{cases} \text{Em } \phi = 0 \Rightarrow V = 0 \Rightarrow \quad B = 0 & \textbf{(02)} \\ \text{Em } \phi = 10° \Rightarrow V = 75 = A \cdot \dfrac{\pi}{18} \Rightarrow \quad A = \dfrac{1350}{\pi} & \textbf{(03)} \end{cases}$

Substituindo **(02)** e **(03)** em **(01)**, temos:

$$V = \frac{1350}{\pi}\phi \quad [V] \qquad \textbf{(04)}$$

- Cálculo de $\vec{\mathbf{E}}$:

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}V \Rightarrow \vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{\mathbf{a}}_\phi \Rightarrow \vec{\mathbf{E}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1350}{\pi}\phi\right)\vec{\mathbf{a}}_\phi$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{E}} = \frac{-1350}{\pi\rho}\vec{\mathbf{a}}_\phi \quad \left[V/m\right]}$$

- Cálculo de $\vec{\mathbf{D}}$:

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon\vec{\mathbf{E}} \Rightarrow \vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_o\varepsilon_R\vec{\mathbf{E}} \Rightarrow \vec{\mathbf{D}} = 8{,}854\times10^{-12} \cdot 1{,}65 \cdot \left(-\frac{1350}{\pi\rho}\right)\vec{\mathbf{a}}_\phi$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{D}} = \frac{-6{,}28}{\rho}\vec{\mathbf{a}}_\phi \quad \left[\eta C/m^2\right]}$$

**6.3) Sendo o potencial** V **função somente da coordenada cilíndrica** ρ **(como num cabo coaxial), determinar:**
**a) a expressão matemática de, sendo** $V = V_0$ **em** $\rho = a$ **e** $V = 0$ **em** $\rho = b$ ($b > a$)**;**
**b) a expressão da capacitância** C**, com as mesmas condições do item (a);**
**c) o valor de** $V_P$ **em P(2,1,3) se** $V = 50$ V **em** $a = 2$ m **e** $V = 20$ V **em** $b = 3$ m**.**

<u>Resolução:</u>

a) Segundo a Equação de Laplace: $\vec{\nabla}^2 V = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}^2 V = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\dfrac{\rho\partial V}{\partial\rho}\right) = 0$, pois $V = f(\rho)$.

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho\partial V}{\partial\rho}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\rho\partial V}{\partial\rho} = A \Rightarrow V = A\ln\rho + B \qquad \textbf{(01)}$$

Condições de Contorno: $\begin{cases} V_o = A\ln a + B \\ 0 = A\ln b + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{V_o}{\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)} \\ B = \dfrac{-V_o \cdot \ln b}{\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)} \end{cases} \qquad \textbf{(02)}$

Substituindo **(02)** em **(01)**, temos:

$$\boxed{V = V_o \cdot \frac{\ln\left(\frac{b}{\rho}\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}$$

b) Sabe-se que $C = \dfrac{Q}{V_o}$ **(01)**

Porém, $Q = S \cdot \rho_S$, onde $\rho_S = D_{N(\rho=a)}$ **(02)**

- Cálculo de $\vec{\mathbf{E}}$:

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} V \Rightarrow \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial V}{\partial \rho}\vec{\mathbf{a}}_\rho \Rightarrow \vec{\mathbf{E}} = \frac{-V_o}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \frac{-\frac{b}{\rho^2}}{\frac{b}{\rho}}\vec{\mathbf{a}}_\rho \Rightarrow \vec{\mathbf{E}} = \frac{V_o}{\rho} \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\vec{\mathbf{a}}_\rho$$

- Cálculo de $D_{N(\rho=a)}$:

$D_{N(\rho=a)} = \varepsilon E_{(\rho=a)}$, onde $E_{(\rho=a)}$ é o módulo de $\vec{\mathbf{E}}$ para $\rho = a$

$$\therefore \rho_S = D_{N(\rho=a)} = \frac{\varepsilon V_o}{a \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad \textbf{(03)}$$

Substituindo **(03)** em **(02)**, temos:

$$Q = \frac{\varepsilon V_o}{a \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot 2\pi a L \Rightarrow Q = \frac{2\pi \varepsilon L V_o}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad \textbf{(04)}$$

Substituindo **(04)** em **(01)**, temos:

$$\boxed{C = \frac{2\pi \varepsilon L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}$$

c) $V = V_o \cdot \dfrac{\ln\left(\frac{b}{\rho}\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$, onde $a = 2$ m e $b = 3$ m. **(01)**

- Cálculo de $V_O$:

$$V_o = 50 - 20 \Rightarrow V_o = 30 \ \ [V] \quad \textbf{(02)}$$

- Cálculo de ρ:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{2^2 + 1^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{5} \quad \textbf{(03)}$$

Substituindo **(02)** e **(03)** em **(01)**, temos:

$$V = 30 \cdot \frac{\ln\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} \Rightarrow V = 21{,}74 \ [V] \qquad \text{(Para V = 0 em } \rho = a\text{)}$$

$$V_P = 20 + 21{,}74 \Rightarrow \boxed{V_P = 41{,}74 \ [V]} \qquad \text{(Para V = 20 V em } \rho = a\text{)}$$

**6.4) Dado o potencial** $V = \dfrac{50\,\text{sen}\,\theta}{r^2}$**, r≠0 [V], no espaço livre.**

**a) Verifique se V satisfaz a equação de Laplace;**

**b) Encontrar a carga total armazenada dentro da casca esférica (1 < r < 2).**

<u>Resolução:</u>

a) Cálculo do Laplaciano (coordenadas esféricas):

$$\vec{\nabla}^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\text{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}$$

$$\vec{\nabla}^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{50\,\text{sen}\,\theta}{r^3}\cdot(-2)\right) + \frac{1}{r^2\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{50}{r^2}\cos\theta\right) + \frac{1}{r^2\,\text{sen}^2\,\theta}\cdot 0$$

$$\vec{\nabla}^2 V = -\frac{1}{r^2}\cdot 100\,\text{sen}\,\theta\cdot\left(\frac{-1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2\,\text{sen}\,\theta}\cdot\frac{50}{r^2}\cos 2\theta$$

$$\vec{\nabla}^2 V = \frac{100}{r^4}\cdot\text{sen}\,\theta + \frac{50}{r^4}\cdot\frac{\cos 2\theta}{\text{sen}\,\theta} \Rightarrow \vec{\nabla}^2 V = \frac{50}{r^4}\cdot\left(2\,\text{sen}\,\theta + \frac{\cos 2\theta}{\text{sen}\,\theta}\right)$$

$$\vec{\nabla}^2 V = \frac{50}{r^4}\cdot\left(2\,\text{sen}\,\theta + \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}\,\theta} - \frac{\text{sen}^2\,\theta}{\text{sen}\,\theta}\right) \Rightarrow \vec{\nabla}^2 V = \frac{50}{r^4}\cdot\left(\text{sen}\,\theta + \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}\,\theta}\right)$$

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 V = \frac{50}{r^4\,\text{sen}\,\theta} \neq 0} \quad \Rightarrow \text{ V **não** satisfaz a Equação de Laplace}$$

b) **1º modo:**

Equação de Poisson: $\vec{\nabla}^2 V = -\dfrac{\rho_v}{\varepsilon_o}$

$$Q = \int_{vol}\rho_v\,dv\text{, onde: }\begin{cases}\rho_v = \dfrac{-50\varepsilon_o}{r^4\,\text{sen}\,\theta} \quad \left[C/m^3\right] \text{ (Segundo a Equacão de Poisson)}\\ dv = r^2\,\text{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\,d\phi\end{cases}$$

$$Q = \int_{vol}\frac{-50\varepsilon_o}{r^4\,\text{sen}\,\theta}\cdot r^2\,\text{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\,d\phi \Rightarrow Q = -50\varepsilon_o\cdot\int_{r=1}^{2}\frac{dr}{r^2}\cdot\int_{\theta=0}^{\pi}d\theta\cdot\int_{\phi=0}^{2\pi}d\phi$$

$$Q = -50\varepsilon_o \cdot \left[\frac{-1}{r}\right]_{r=1}^{2} \cdot \pi \cdot 2\pi \Rightarrow Q = 100\pi^2\varepsilon_o \cdot \left[\frac{1}{2} - 1\right] \Rightarrow \boxed{Q = -50\pi^2\varepsilon_o \ [C]}$$

**2º modo:** $V = \dfrac{50\,\text{sen}\,\theta}{r^2}$ [V]

- Cálculo de $\vec{\mathbf{E}}$:

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{\mathbf{a}}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{\mathbf{a}}_\theta - \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{\mathbf{a}}_\phi$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{100\,\text{sen}\,\theta}{r^3}\vec{\mathbf{a}}_r - \frac{50\cos\theta}{r^3}\vec{\mathbf{a}}_\theta \quad \left[V/m\right]$$

- Cálculo de $\vec{\mathbf{D}}$:

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_o\vec{\mathbf{E}} = \frac{100\varepsilon_o\,\text{sen}\,\theta}{r^3}\vec{\mathbf{a}}_r - \frac{50\varepsilon_o\cos\theta}{r^3}\vec{\mathbf{a}}_\theta \quad \left[C/m^2\right] \qquad \textbf{(02)}$$

- Cálculo de $\rho_v$:

$$\rho_v = \vec{\nabla} \bullet \vec{\mathbf{D}} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r\right) + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(D_\theta\,\text{sen}\,\theta\right) + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(D_\phi\right)$$

$$\rho_v = \frac{1}{r^2} \cdot \left(100\varepsilon_o\,\text{sen}\,\theta\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{1}{r^3}\right) + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta} \cdot \left(\frac{-50\varepsilon_o}{r^3}\right)\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\,\text{sen}\,\theta\right) + 0$$

$$\rho_v = \frac{100\varepsilon_o\,\text{sen}\,\theta}{r^2} \cdot \left(\cdot\frac{-1}{r^2}\right) + \frac{-50\varepsilon_o}{r^4\,\text{sen}\,\theta} \cdot \left(\cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta\right)$$

$$\rho_v = \frac{-100\varepsilon_o\,\text{sen}\,\theta}{r^4} - \frac{50\varepsilon_o}{r^4\,\text{sen}\,\theta} \cdot \left(\cos 2\theta\right)$$

$$\rho_v = \frac{-50\varepsilon_o}{r^4} \cdot \left(2\,\text{sen}\,\theta + \frac{\cos 2\theta}{\text{sen}\,\theta}\right) \Rightarrow \rho_v = \frac{-50\varepsilon_o}{r^4\,\text{sen}\,\theta} \quad \left[C/m^3\right] \qquad \textbf{(03)}$$

- Cálculo de Q:

$$Q = \int_{vol} \rho_v dv \text{, onde: } \begin{cases} \rho_v = \dfrac{-50\varepsilon_o}{r^4\,\text{sen}\,\theta} \\ dv = r^2\,\text{sen}\,\theta\,dr d\theta\,d\phi \end{cases}$$

$$Q = \int_{vol} \frac{-50\varepsilon_o}{r^4\,\text{sen}\,\theta} \cdot r^2\,\text{sen}\,\theta\,dr d\theta\,d\phi \Rightarrow Q = -50\varepsilon_o \cdot \int_{r=1}^{2}\frac{dr}{r^2} \cdot \int_{\theta=0}^{\pi}d\theta \cdot \int_{\phi=0}^{2\pi}d\phi$$

$$Q = -50\varepsilon_o \cdot \left[\frac{-1}{r}\right]_{r=1}^{2} \cdot \pi \cdot 2\pi \Rightarrow Q = 100\pi^2\varepsilon_o \cdot \left[\frac{1}{2} - 1\right]$$

$$\boxed{\therefore Q = -50\pi^2\varepsilon_o \ [C] \ \text{ ou } \ Q = -4{,}37 \ [\eta C]}$$

**3º modo:**

$$Q = \int_S \vec{\mathbf{D}} \bullet \vec{\mathbf{dS}}\text{, onde: } \begin{cases} \vec{\mathbf{dS}} = r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \, \vec{\mathbf{a}}_r \\ \vec{\mathbf{D}} = \dfrac{100\varepsilon_o \operatorname{sen}\theta}{r^3} \vec{\mathbf{a}}_r - \dfrac{50\varepsilon_o \cos\theta}{r^3} \vec{\mathbf{a}}_\theta \end{cases}$$

$$Q = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{100\varepsilon_o \operatorname{sen}\theta}{r^3} \cdot r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \Rightarrow Q = \frac{100\varepsilon_o}{r} \cdot 2\pi \cdot \int_{\theta=0}^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta$$

$$Q = \frac{100\varepsilon_o}{r} \cdot 2\pi \cdot \int_{\theta=0}^{\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta \right) d\theta \Rightarrow Q = \frac{200\pi\varepsilon_o}{r} \cdot \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta \right]_{\theta=0}^{\pi}$$

$$Q = \frac{200\pi\varepsilon_o}{r} \cdot \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\pi - 0 - 0 \right] \Rightarrow Q = \frac{100\pi^2\varepsilon_o}{r}$$

Em $r = 1 \Rightarrow Q = 100\pi^2\varepsilon_o$ [C]

Em $r = 2 \Rightarrow Q = 50\pi^2\varepsilon_o$ [C]

Para $1 < r < 2 \Rightarrow Q = 50\pi^2\varepsilon_o - 100\pi^2\varepsilon_o \Rightarrow$ $\boxed{Q = -50\pi^2\varepsilon_o \text{ [C] ou } Q = -4{,}37 \text{ [}\eta\text{C]}}$

**6.5) Dois cilindros condutores coaxiais de raios** $a = 2$ cm **e** $b = 6$ cm **apresentam potenciais de** 100 V **e de** 0 V**, respectivamente. A região entre os cilindros é preenchida com um dielétrico perfeito, porém, não homogêneo, no qual** $\varepsilon_R = 0{,}3/(\rho + 0{,}04)$**. Determinar para esta região:**

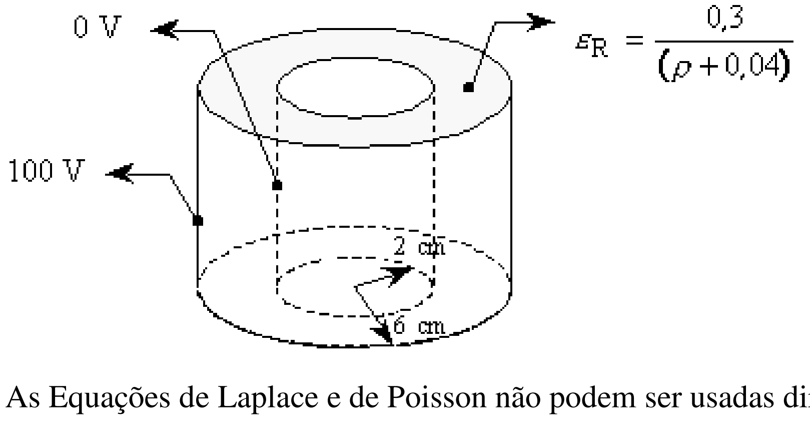
**a) o potencial elétrico** $V(\rho)$**;**

**b) o campo elétrico** $\vec{E}(\rho)$**;**

**c) a densidade de fluxo elétrico** $\vec{D}(\rho)$**;**

**d) a capacitância** C **por metro de comprimento.**

Resolução:




a) $\varepsilon_R = f(\rho) \Rightarrow$ As Equações de Laplace e de Poisson não podem ser usadas diretamente;

- Deve-se calcular uma relação a partir da forma puntual de Lei de Gauss, da definição de $\vec{\mathbf{D}}$ e da relação do Gradiente. Portanto:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \bullet \vec{\mathbf{D}} = \rho_V \text{ (Forma Puntual da Lei de Gauss);} \\ \vec{\mathbf{D}} = \varepsilon\vec{\mathbf{E}} \text{ (Definição de } \vec{\mathbf{D}}\text{);} \\ \vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}V \text{ (Relacão do Gradiente).} \end{cases} \Rightarrow \vec{\nabla} \bullet \left(\varepsilon \cdot \vec{\nabla}V\right) = -\rho_V \qquad \textbf{(01)}$$

No dielétrico perfeito, $\rho_v = 0$ e $\varepsilon = \varepsilon_o\varepsilon_R$ **(02)**

Substituindo **(02)** em **(01)**, temos:

$$\vec{\nabla} \bullet \left(\varepsilon_R \cdot \vec{\nabla}V\right) = 0 \qquad \textbf{(03)}$$

Desenvolvendo **(03)**, temos:

$$\vec{\nabla} \bullet \left(\varepsilon_R \cdot \left(\frac{dV}{d\rho}\vec{a}\rho\right)\right) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \bullet \left(\left(\frac{0{,}3}{\rho + 0{,}04}\right) \cdot \left(\frac{dV}{d\rho}\vec{a}\rho\right)\right) = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho \cdot \frac{0{,}3}{\rho + 0{,}04} \cdot \frac{\partial V}{\partial\rho}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{0{,}3\rho}{\rho + 0{,}04} \cdot \frac{\partial V}{\partial\rho}\right) = 0$$

Integrando pela $1^a$ vez:

$$\frac{0{,}3\rho}{\rho + 0{,}04} \cdot \frac{\partial V}{\partial\rho} = A \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial\rho} = \frac{A(\rho + 0{,}04)}{0{,}3\rho} \Rightarrow \partial V = \frac{A(\rho + 0{,}04)}{0{,}3\rho}\partial\rho$$

Integrando pela $2^a$ vez:

$$V = \int \frac{A(\rho + 0{,}04)}{0{,}3\rho}d\rho \Rightarrow V = \frac{A}{0{,}3}\left[\rho + 0{,}04\ln\rho\right] + B \qquad \textbf{(04)}$$

$$\text{Condições de Contorno: } \begin{cases} \text{Em } \rho = 2\,\text{cm} \Rightarrow V = 100 = \dfrac{A}{0{,}3}\left[0{,}02 + 0{,}04\ln 0{,}02\right] + B & \textbf{(05)} \\ \text{Em } \rho = 6\,\text{cm} \Rightarrow V = 0 = \dfrac{A}{0{,}3}\left[0{,}06 + 0{,}04\ln 0{,}06\right] + B & \textbf{(06)} \end{cases}$$

Fazendo **(05) – (06)**, temos:

$$100 = \frac{A}{0{,}3}\left[-0{,}04 + 0{,}04\ln\frac{0{,}02}{0{,}06}\right] \Rightarrow A = -357{,}4 \qquad \textbf{(07)}$$

Substituindo **(07)** em **(06)**, temos:

$$B = \frac{-357{,}4}{0{,}3}\left[0{,}06 + 0{,}04\ln 0{,}06\right] \Rightarrow B = -62{,}6 \qquad \textbf{(08)}$$

Substituindo **(07)** e **(08)** em **(04)**, temos:

$$V = \frac{-357{,}4}{0{,}3}\left[\rho + 0{,}04\ln\rho\right] - 62{,}6 \Rightarrow \boxed{V = -1191{,}34\,\rho - 47{,}65\ln\rho - 62{,}6 \ \ [V]}$$

b) Cálculo do Campo Elétrico $\vec{\mathbf{E}}(\rho)$:

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}V \Rightarrow \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial V}{\partial \rho}\vec{\mathbf{a}}_\rho \Rightarrow \vec{\mathbf{E}} = \left(1191{,}34 + \frac{47{,}6}{\rho}\right)\vec{\mathbf{a}}_\rho$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{E}} = 1191{,}34\left[1 + \left(\frac{0{,}04}{\rho}\right)\right]\vec{\mathbf{a}}_\rho \quad \left[\mathrm{V}/\mathrm{m}\right]}$$

c) Cálculo da Densidade de Fluxo Elétrico $\vec{\mathbf{D}}(\rho)$:

$$\oint_S \vec{\mathbf{D}} \bullet \vec{\mathbf{dS}} = Q_{int} = \int_S \rho_S dS$$ (Lei de Gauss para uma Superfície Gaussiana Cilíndrica de raio 2<ρ<6 cm)

$$D \cdot 2\pi\,\rho \cdot L = \rho_S \cdot 2\pi\,a \cdot L \Rightarrow \vec{\mathbf{D}} = \frac{\rho_S \cdot a}{\rho}\vec{\mathbf{a}}_\rho \qquad \textbf{(01)}$$

Mas $\rho_S = D_{N(\rho=0{,}02)} = \varepsilon\, E_{(\rho=0{,}02)}$, onde $E_{(\rho=0{,}02)}$ é o módulo de $\vec{\mathbf{E}}$ para $\rho = 0{,}02$m

$$\rho_S = \varepsilon_o \varepsilon_{R(\rho=0{,}02)}\, E_{(\rho=0{,}02)} \Rightarrow \rho_S = \varepsilon_o \cdot \left(\frac{0{,}3}{0{,}02+0{,}04}\right)\cdot\left(1191{,}34\left[1+\frac{0{,}04}{0{,}02}\right]\right)$$

$$\therefore \rho_S = 158{,}22 \quad \left[\eta\mathrm{C}/\mathrm{m}^2\right] \qquad \textbf{(02)}$$

Substituindo **(02)** em **(01)**, temos:

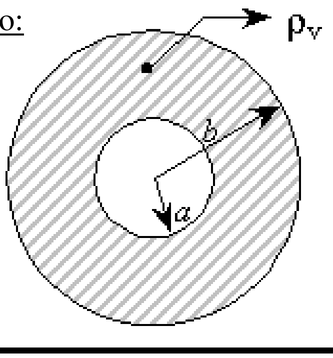
$$\vec{\mathbf{D}} = \frac{158{,}22 \cdot 0{,}02}{\rho}\vec{\mathbf{a}}_\rho \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{D}} = \frac{3{,}16}{\rho}\vec{\mathbf{a}}_\rho \quad \left[\eta\mathrm{C}/\mathrm{m}^2\right]$$

d) Cálculo da capacitância C por metro de comprimento:

$$C = \frac{Q}{V_0} \Rightarrow C = \frac{S \cdot \rho_S}{V_0} \Rightarrow C = \frac{158{,}22 \cdot 2\pi \cdot 0{,}02 \cdot L}{100} \Rightarrow \frac{C}{L} = 198{,}8 \quad \left[\mathrm{pF}/\mathrm{m}\right]$$

**6.6) Uma região entre dois cilindros condutores concêntricos com raios** $a$ = 2 cm **e** $b$ = 5 cm **contém uma densidade volumétrica de carga uniforme** $\rho_V = -10^{-8}$ **C/m³. Se o campo elétrico** $\vec{\mathbf{E}}$ **e o potencial** V **são ambos nulos no cilindro interno, determinar:**
**a) A expressão matemática do potencial** V **na região, partindo da <u>Equação de Poisson</u>;**
**b) A expressão matemática do potencial** V **na região, partindo da <u>Lei de Gauss</u>;**
**c) O valor do potencial** V **no cilindro externo.**
**Assumir a permissividade do meio como sendo a do vácuo.**

Resolução:




a) Equação de Poisson: $\vec{\nabla}^2 V = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_o}$

Integrando pela 1ª vez:

$$\rho\frac{\partial V}{\partial\rho} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_o}\cdot\frac{\rho^2}{2} + A \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{\rho_v}{2\varepsilon_o}\cdot\rho + \frac{A}{\rho} \qquad \textbf{(01)}$$

- Porém, sabe-se que: $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla}\mathrm{V} \Rightarrow \vec{\mathbf{E}} = -\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial \rho}\vec{\mathbf{a}}_{\rho} \Rightarrow |\vec{\mathbf{E}}| = \mathsf{E} = -\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial \rho} \Rightarrow \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial \rho} = -\mathsf{E}$ **(02)**

Substituindo **(02)** em **(01)**, temos:

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \rho} = -\mathsf{E} = -\frac{\rho_{\mathrm{V}}}{2\varepsilon_{\mathrm{o}}}\cdot \rho + \frac{\mathrm{A}}{\rho} \qquad \textbf{(03)}$$

1ª Condição de Contorno: $\mathsf{E} = 0$ para $\rho = a$. **(04)**

Substituindo **(04)** em **(03)**, temos:

$$0 = -\frac{\rho_{\mathrm{V}}}{2\varepsilon_{\mathrm{o}}}\cdot a + \frac{\mathrm{A}}{a} \Rightarrow \mathrm{A} = \frac{\rho_{\mathrm{V}}}{2\varepsilon_{\mathrm{o}}}\cdot a^2 \qquad \textbf{(05)}$$

Substituindo **(05)** em **(01)**, temos:

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \rho} = -\frac{\rho_{\mathrm{V}}}{2\varepsilon_{\mathrm{o}}}\cdot \rho + \frac{\rho_{\mathrm{V}}}{2\varepsilon_{\mathrm{o}}}\cdot \frac{a^2}{\rho} \qquad \textbf{(06)}$$

Integrando pela 2ª vez:

$$\mathrm{V} = -\frac{\rho_{\mathrm{V}}}{2\varepsilon_{\mathrm{o}}}\cdot \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho_{\mathrm{V}}}{2\varepsilon_{\mathrm{o}}}\cdot a^2 \ln \rho + \mathrm{B} \qquad \textbf{(07)}$$

2ª Condição de Contorno: $\mathrm{V} = 0$ para $\rho = a$. **(08)**

Substituindo **(08)** em **(07)**, temos:

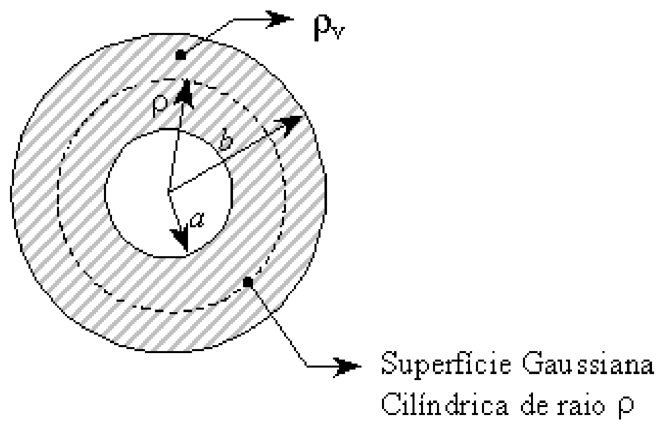
$$0 = -\frac{\rho_{\mathrm{V}}}{2\varepsilon_{\mathrm{o}}}\cdot \frac{a^2}{2} + \frac{\rho_{\mathrm{V}}}{2\varepsilon_{\mathrm{o}}}\cdot a^2 \ln a + \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{B} = \frac{\rho_{\mathrm{V}}}{4\varepsilon_{\mathrm{o}}}\cdot a^2 - \frac{\rho_{\mathrm{V}}}{2\varepsilon_{\mathrm{o}}}\cdot a^2 \ln a \qquad \textbf{(09)}$$

Substituindo **(09)** em **(07)**, temos:

$$\mathrm{V} = -\frac{\rho_{\mathrm{V}}}{4\varepsilon_{\mathrm{o}}}\cdot \rho^2 + \frac{\rho_{\mathrm{V}}}{2\varepsilon_{\mathrm{o}}}\cdot a^2 \ln \rho + \frac{\rho_{\mathrm{V}}}{4\varepsilon_{\mathrm{o}}}\cdot a^2 - \frac{\rho_{\mathrm{V}}}{2\varepsilon_{\mathrm{o}}}\cdot a^2 \ln a$$

$$\boxed{\mathrm{V} = \frac{\rho_{\mathrm{V}}}{4\varepsilon_{\mathrm{o}}}\cdot (a^2 - \rho^2) + \frac{\rho_{\mathrm{V}}}{2\varepsilon_{\mathrm{o}}}\cdot a^2 \ln\left(\frac{\rho}{a}\right) \quad [\mathrm{V}]}$$

b)




Lei de Gauss: $\oint_S \vec{\mathbf{D}} \bullet \vec{\mathbf{dS}} = Q_{int} = \int_S \rho_S dS$

$$D \cdot 2\pi\,\rho \cdot L = \rho_v \cdot (\pi\rho^2 - \pi\,a^2) \cdot L \Rightarrow D = \frac{\rho_v}{2} \cdot \left(\rho - \frac{a^2}{\rho}\right)$$

$$\therefore \vec{\mathbf{D}} = \frac{\rho_v}{2} \cdot \left(\rho - \frac{a^2}{\rho}\right)\vec{\mathbf{a}}_\rho \quad \left[{}^{C}\!/\!_{m^2}\right]$$

- Cálculo do Campo Elétrico $\vec{\mathbf{E}}$:

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{D}}}{\varepsilon_o} \Rightarrow \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho_v}{2\varepsilon_o} \cdot \left(\rho - \frac{a^2}{\rho}\right)\vec{\mathbf{a}}_\rho \quad \left[{}^{V}\!/\!_{m}\right]$$

- Cálculo de V:

$$V_{AB} = -\int_B^A \vec{\mathbf{E}} \bullet \vec{\mathbf{dL}} \Rightarrow V = -\int_{\rho=a}^{\rho} \frac{\rho_v}{2\varepsilon_o} \cdot \left(\rho - \frac{a^2}{\rho}\right)\vec{\mathbf{a}}_\rho \bullet d\rho\,\vec{\mathbf{a}}_\rho$$

$$V = -\frac{\rho_v}{2\varepsilon_o} \cdot \left[\frac{\rho^2}{2} - a^2 \ln\rho\right]_{\rho=a}^{\rho} \Rightarrow V = -\frac{\rho_v}{2\varepsilon_o} \cdot \left[\left(\frac{\rho^2}{2} - a^2 \ln\rho\right) - \left(\frac{a^2}{2} - a^2 \ln a\right)\right]$$

$$\boxed{V = \frac{\rho_v}{4\varepsilon_o} \cdot (a^2 - \rho^2) + \frac{\rho_v a^2}{2\varepsilon_o} \cdot \ln\frac{\rho}{a} \quad [V]}$$

c) No cilindro externo, ρ = $b$ = 0,05 m .

$$\therefore V = \frac{-10^{-8}}{4 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}} \cdot (0{,}02^2 - 0{,}05^2) + \frac{(-10^{-8}) \cdot 0{,}02^2}{2 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}} \cdot \ln\frac{0{,}05}{0{,}02}$$

$$V = 0{,}593 - 0{,}207 \Rightarrow \boxed{V = 0{,}386 \quad [V]}$$

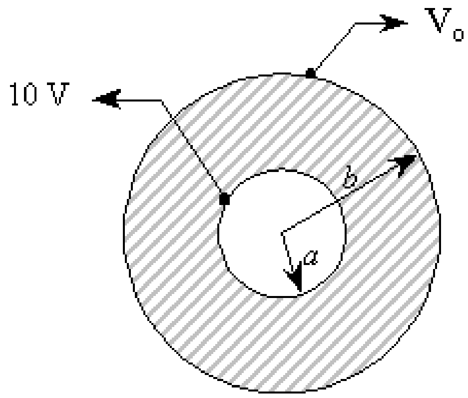
**6.7) Dois cilindros condutores, circulares retos, coaxiais, acham-se em** $\rho = a = 10$ mm **e** $\rho = b = 30$ mm**, com tensões de 10 volts no cilindro interno e** $V_o$ **no cilindro externo. Se** $\vec{E} = -10\,\vec{a}_\rho$ $[KV/m]$ **em** $\rho = 20$ mm**, determinar:**

**a) A expressão do potencial** V **em função de** $\rho$ **por Laplace;**

**b) O valor de** $V_o$**;**

**c)A densidade de cargas do condutor externo.**

Resolução:




a) Equação de Laplace: $\vec{\nabla}^2 V = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho\partial V}{\partial\rho}\right) = 0$, pois $V = f(\rho)$.

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho\partial V}{\partial\rho}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\rho\partial V}{\partial\rho} = A \Rightarrow \quad V = A\ln\rho + B \qquad \textbf{(01)}$$

$1^a$ Condição de Contorno: V = 10 V em $\rho$ = 10 mm . **(02)**

Substituindo **(02)** em **(01)**, temos:

$$10 = A\ln(0{,}01) + B \qquad \textbf{(03)}$$

Porém, sabe-se que $\vec{E} = -10\,\vec{a}_\rho$ $[KV/m]$ $\rho$ = 20 mm, oque indica que:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \Rightarrow \vec{E} = -\frac{A}{\rho}\vec{a}_\rho \Rightarrow E = -\frac{A}{\rho} \Rightarrow -10000 = -\frac{A}{0{,}02} \Rightarrow \quad A = 200$$

$$\therefore \vec{E} = -\frac{200}{\rho}\vec{a}_\rho \qquad \textbf{(02)}$$

Substituindo **(04)** em **(03)**, temos:

$$10 = 200\ln(0{,}01) + B \Rightarrow \quad B = 931 \qquad \textbf{(05)}$$

Substituindo **(04)** e **(05)** em **(01)**, temos:

$$V = A\ln\rho + B \Rightarrow \boxed{V = 200\ln\rho + 931 \quad [V]} \qquad \textbf{(06)}$$

b) 2ª Condição de Contorno: $V = V_o$ em $\rho = 30$ mm . **(01)**

Substituindo a equação **(01)** do item **(b)** na equação **(06)** do item **(a)**, temos:

$$V = 200\ln\rho + 931 \Rightarrow V_o = 200\ln(0{,}03) + 931 \Rightarrow \quad V_o = 229{,}7 \ \ [V]$$

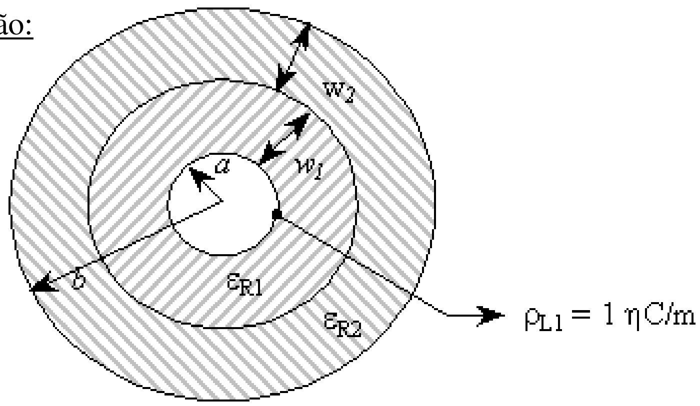
c) $\rho_S = D_{N(\rho=0,03)} = \varepsilon E_{(\rho=0,03)}$, onde $E_{(\rho=0,03)}$ é o módulo de $\vec{E}$ (da Equação **(04)** do item **(a)**) para $\rho = 0{,}03$ m .

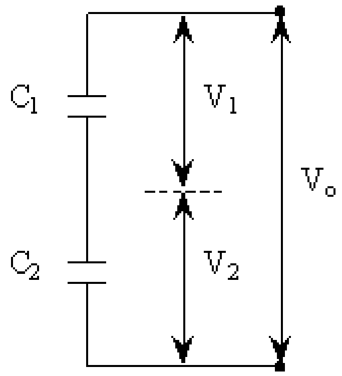
$$\rho_S = \varepsilon_o E_{(\rho=0,03)} \Rightarrow \rho_S = \varepsilon_o \cdot \left(\frac{-200}{\rho}\right) \Rightarrow \rho_S = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot \left(\frac{-200}{0{,}03}\right)$$

$$\boxed{\therefore \rho_S = -59{,}027 \ \left[{}^{\eta C}/_{m^2}\right]}$$

**6.8) Um cabo coaxial possui seu condutor interno com cargas uniformemente distribuída de** 1ηC/m**. Os raios dos condutores interno e externo são** $a$ = 1 cm **e** $b$ = 4 cm**, respectivamente. Entre o condutor interno e o externo são colocadas duas camadas de material dielétrico possuindo, respectivamente, permissividades relativas** $\varepsilon_{R1} = 2$ **e** $\varepsilon_{R2}$**, e espessuras** $w_1$ **e** $w_2$**. Determinar** $\varepsilon_{R2}$, $w_1$ **e** $w_2$**, de modo que a diferença de potencial de cada camada seja a mesma e a capacitância total do cabo seja de** 75 $p$F/m**.**

<u>Resolução:</u>




- Cálculo da Capacitância:

Equação de Laplace: $\vec{\nabla}^2 V = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho\partial V}{\partial\rho}\right) = 0$, pois $V = f(\rho)$.

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho\partial V}{\partial\rho}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\rho\partial V}{\partial\rho} = A \Rightarrow \quad V = A\ln\rho + B \qquad \textbf{(01)}$$

Condições de Contorno:

$$\text{Seja}\begin{cases} V = 0 \ \text{ em } \rho = b \Rightarrow 0 = A\ln b + B & \textbf{(02)} \\ V = V_o \ \text{ em } \rho = a \Rightarrow V_o = A\ln a + B & \textbf{(03)} \end{cases}$$

Fazendo **(03)** – **(02)**,temos:

$$V_o = A(\ln a - \ln b) \Rightarrow \quad A = \frac{V_o}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \qquad \textbf{(04)}$$

Substituindo **(04)** em **(02)**, temos:

$$0 = \frac{V_o}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \cdot \ln b + B \Rightarrow B = \frac{-V_o \cdot \ln b}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \qquad \textbf{(05)}$$

Substituindo **(04)** e **(05)** em **(01)**, temos:

$$V = A \ln \rho + B \Rightarrow V = \frac{V_o}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \cdot \ln \rho - \frac{V_o \cdot \ln b}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

$$V = \frac{V_o}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \cdot (\ln \rho - \ln b) \Rightarrow V = \frac{V_o}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \cdot \ln\left(\frac{\rho}{b}\right) \quad [V]$$

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\nabla} V \Rightarrow \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial V}{\partial \rho}\vec{\mathbf{a}}_\rho \Rightarrow \vec{\mathbf{E}} = \left(\frac{-V_o}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \cdot \frac{\frac{1}{b}}{\frac{\rho}{b}}\right)\vec{\mathbf{a}}_\rho \Rightarrow \vec{\mathbf{E}} = \left(\frac{-V_o}{\rho \cdot \ln\left(\frac{a}{b}\right)}\right)\vec{\mathbf{a}}_\rho \quad \left[V/m\right]$$

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon \vec{\mathbf{E}} \Rightarrow \vec{\mathbf{D}} = \left(\frac{-\varepsilon V_o}{\rho \cdot \ln\left(\frac{a}{b}\right)}\right)\vec{\mathbf{a}}_\rho \quad \left[C/m^2\right]$$

$$\rho_S = D_{N_{(\rho=a)}} = \left|\vec{\mathbf{D}}(\rho=a)\right| \Rightarrow \rho_S = \frac{-\varepsilon V_o}{a \cdot \ln\left(\frac{a}{b}\right)} > 0, \text{ pois } a < b \Rightarrow \ln\left(\frac{a}{b}\right) < 0$$

$$\therefore \rho_S = \frac{\varepsilon V_o}{a \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad \left[C/m^2\right]$$

$$Q = \int_S \rho_S \, dS \Rightarrow Q = \int_{\substack{S \\ \text{Cil. Interno}}} \frac{\varepsilon V_o}{a \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} dS \Rightarrow Q = \frac{\varepsilon V_o}{a \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot 2\pi a L$$

$$Q = \frac{2\pi\varepsilon V_o L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad [C] \qquad \textbf{(06)}$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_o} \Rightarrow C = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad [F] \quad \text{ou} \quad \frac{C}{L} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad \left[F/m\right]}$$

$$\text{Dados:}\begin{cases} a = 1\text{cm},\ b = 4\text{cm}; \\ w_1 + w_2 = b - a = 3\text{cm} \\ \varepsilon_{R1} = 2; \\ V_1 = V_2 = \dfrac{V_o}{2} \\ Q_1 = Q_2 = Q \\ \dfrac{C_T}{L} = 75\left[{}^{pF}\!/\!_{m}\right] \end{cases} \tag{07}$$

De **(06)**, temos:

$$\frac{C_1}{L} = \frac{2\pi\varepsilon_o\varepsilon_{R1}}{\ln\left(\dfrac{a + w_1}{a}\right)} = \frac{Q_1}{V_1} \tag{08}$$

e

$$\frac{C_2}{L} = \frac{2\pi\varepsilon_o\varepsilon_{R2}}{\ln\left(\dfrac{b}{a + w_1}\right)} = \frac{Q_2}{V_2} \tag{09}$$

De **(07)**, temos:

$$\begin{cases} V_1 = V_2 = \dfrac{V_o}{2} \\ Q_1 = Q_2 = Q \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = C$$

De acordo com a figura, $C_T$ é a capacitância equivalente do arranjo série de $C_1$ e $C_2$.

Portanto, podemos escrever:

$$C_T = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \Rightarrow C_T = \frac{C^2}{2C} \Rightarrow C_T = \frac{C}{2} \Rightarrow C = 2C_T \tag{10}$$

Substituindo **(10)** em **(08)**, temos:

$$\frac{C_1}{L} = \frac{C}{L} = \frac{2\pi\varepsilon_o\varepsilon_{R1}}{\ln\left(\dfrac{a + w_1}{a}\right)} = \frac{2C_T}{L} \Rightarrow \frac{2\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 2}{\ln\left(\dfrac{0{,}01 + w_1}{0{,}01}\right)} = 2 \cdot 75 \cdot 10^{-12}$$

$$\ln\left(\frac{0{,}01 + w_1}{0{,}01}\right) = \frac{2\pi \cdot 8{,}854}{75} \Rightarrow \ln\left(\frac{0{,}01 + w_1}{0{,}01}\right) = 0{,}7407 \Rightarrow \frac{0{,}01 + w_1}{0{,}01} = e^{0{,}7407}$$

$$\boxed{\therefore\ w_1 = 0{,}01097\text{m} \Rightarrow w_1 \cong 1{,}1\text{cm}} \tag{11}$$

De **(07)**, sabemos que $w_1 + w_2 = 3\text{cm}$. Portanto, $\boxed{w_2 = 1{,}9\text{ cm}}$ **(12)**

Substituindo **(11)** em **(09)**, temos:

$$\frac{C_2}{L} = \frac{C}{L} = \frac{2\pi\varepsilon_o\varepsilon_{R2}}{\ln\left(\frac{b}{a + w_1}\right)} = \frac{2C_T}{L} \Rightarrow \frac{2\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot \varepsilon_{R2}}{\ln\left(\frac{0{,}04}{0{,}01 + 0{,}011}\right)} = 2 \cdot 75 \cdot 10^{-12}$$

$$\varepsilon_{R2} = \frac{75 \cdot \ln(1{,}904)}{\pi \cdot 8{,}854} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{R2} = 1{,}736}$$