

Notar que o sentido do campo magnético $\vec{B}$ circunda o fio de corrente. Assim, se tomarmos uma integral de linha a uma distância circular R do fio de corrente, temos:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{2K_m I}{R} \cdot \oint \hat{u} \cdot d\vec{l}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{2K_m I}{R} \oint dl$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{2K_m I}{R} \cdot 2\pi R$$

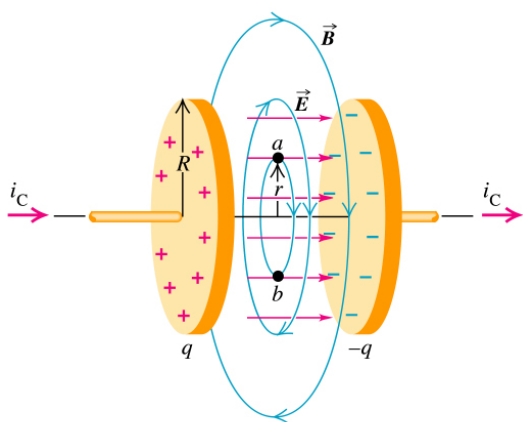
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 4\pi K_m I$$

(Eq. 3 - Max)

Esta equação diz - mesmo sem ainda conhecermos a unidade de corrente e o valor de K_m - que a integral de linha ao redor de um fio de corrente é proporcional à corrente que passa pelo fio.

$\vec{B}$ também é produzido por variação de campo Elétrico.

Digamos que no meio de um fio de corrente, situemos duas placas condutoras paralelas, como ilustrado abaixo.



Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

A corrente que chega em um lado é a mesma de sai do outro lado. Embora nenhuma carga real atravessasse de um lado para o outro - não existe uma corrente elétrica real - ainda assim observa-se um campo magnético entre as placas. Curiosamente, a intensidade e o sentido do campo magnético observado são idênticos aos obtidos (numa distância radial equivalente) fora das placas. Como se a corrente real estivesse lá.

das placas. Como se a corrente real estivesse lá.

Chama-se esta corrente virtual de corrente de deslocamento I_D , e como esta equivale à corrente real, podemos escrever, na região entre as placas:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 4\pi K_M \cdot I_D$$

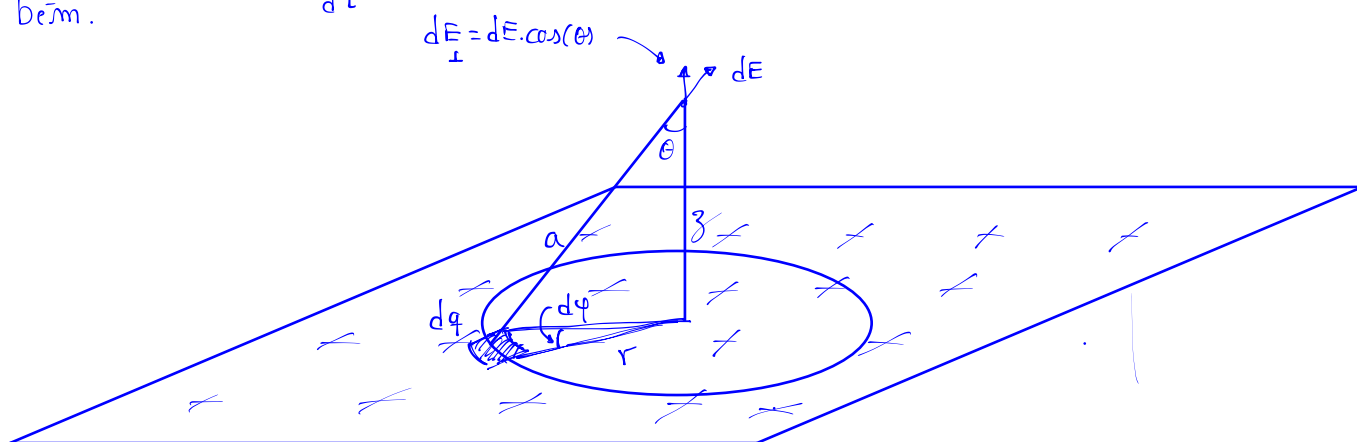
Mas quem é essa I_D , do ponto de vista experimental?

Como a ilustração acima mostra, as carga armazenadas nas placas produzem campo elétrico na região interna às placas. Como só observase campo magnético enquanto existe corrente no fio, então só haverá campo magnético entre as placas enquanto o campo elétrico estiver variando.

Obtenção da corrente de deslocamento:

Passo 1) Vamos calcular o campo elétrico próximo a uma placa plana com carga total q e então tomar $\frac{dq}{dt}$, afinal esta é a corrente.

ou seja, o que $\frac{dq}{dt}$ produz ou outro lado da igualdade produzirá também.



$$dE = \frac{dq}{a^2}$$

, para um anel podemos considerar apenas a componente perpendicular $dE_{\perp}$, pois as componentes paralelas ao plano cancelam-se mutuamente.

$$dq = \sigma \cdot 2\pi r dr \quad \text{e} \quad \alpha^2 = \sqrt{z^2 + r^2}$$

$$\rightarrow dE_1 = \frac{\sigma \cdot 2\pi r dr}{(z^2 + r^2)} \cdot \cos(\theta)$$

$$; \quad \cos(\theta) = \frac{z}{(z^2 + r^2)^{1/2}}$$

$$dE_1 = \frac{z \cdot \sigma \cdot 2\pi r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$E_1 = \int dE_1 = 2\pi\sigma z \int_0^R \frac{r}{(z^2 + r^2)^{3/2}} dr$$

"Obs: $R = \infty$ se $A \gg z$."

$$u = z^2 + r^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2r dr$$

$$E_1 = \frac{2\pi\sigma z}{2} \int_{z^2}^{R^2 + z^2} \frac{1}{u^{3/2}} \cdot du$$

$$\text{limites: } r=0 \rightarrow u = z^2$$

$$r=R \rightarrow u = z^2 + R^2$$

$$E_1 = \pi\sigma z \left[u^{-1/2} \right]_{z^2}^{R^2 + z^2}$$

$$E_1 = -2\pi\sigma z \left\{ \frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{1}{|z|} \right\}$$

$$E_1 = 2\pi\sigma \left\{ \frac{z}{|z|} - \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right\}$$

$$\text{Para } R \gg z \quad \text{e} \quad z > 0$$

$$\Rightarrow E_1 = 2\pi\sigma$$

$$\text{Usando } \sigma = q/A$$

" q = carga na placa e A = área da placa"

$$\Rightarrow E_1 = \frac{2\pi q}{A}$$

Em nosso caso, devemos multiplicar por 2 pois temos contribuição de 2 placas.

$$\Rightarrow E_1 = \frac{4\pi q}{A}$$

$$\Rightarrow q = \frac{A}{4\pi} E_1$$

$$\Rightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{A}{4\pi} \cdot \frac{dE_1}{dt}$$

Como o lado esquerdo é a corrente real dq/dt , este termo representa a corrente virtual entre as placas I_p .

Assim, entre as placas:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 4\pi k_m \cdot \frac{A}{4\pi} \frac{dE}{dt}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = A \cdot k_m \frac{dE}{dt}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = k_m \cdot \frac{d}{dt}(A \cdot E)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = k_m \cdot \frac{d}{dt}(\phi_E)$$

A fim de cobrir todas as possibilidades, ou seja, todas as tipos de contribuições para $\vec{B} \rightarrow (I + I_p)$

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 4\pi k_m I + k_m \frac{d}{dt}(\phi_E) \quad (\text{Eq.3 - Max})$$

Vale frisar que este resultado vem de observações experimentais de proporcionalidades, ou seja, k_m ainda não foi definida. Só o que esperamos é que tenha alguma relação com as unidades de carga eletrostática.

Adiantando resultados: Mais a frente, tendo as relações de Maxwell

em mãos, seremos capazes de relacionar $\underline{K_m}$, pois o campo eletrostático aparece na Eq. 3-Max e também na Eq. 1-Max.

Vamos agora considerar a observação de que variação de campo magnético também produz campo elétrico.

Obs: Vale colocar para meditação: Como podemos estar falando em um campo elétrico produzindo um campo magnético e vice versa, se na verdade não existem dois campos diferentes, ou seja, se o fato de ser $\underline{B}$ ou $\underline{E}$, depende apenas do referencial?

Faraday notou, ~1830, que corrente elétrica era induzida e condutores sempre que correntes variavam em outros condutores próximos. Variação de corrente elétrica significa variação de campo magnético, ou seja, uma força eletromotriz surge sempre que um condutor está numa região de campo magnético variável.

Experimentos buscando relações de proporcionalidade mostraram que:

$$\text{Força motriz} \propto \frac{d\Phi_B}{dt}$$

→ Força que empurra cargas através de uma espira condutora em uma região de campo magnético variável.

A fim de obtermos a igualdade entre campo elétrico e a variação de campo magnético - vamos antes entender, mais uma vez, a relatividade do tipo de campo observado - ou seja - ser campo elétrico ou magnético depende de em qual referencial estamos realizando o experimento.

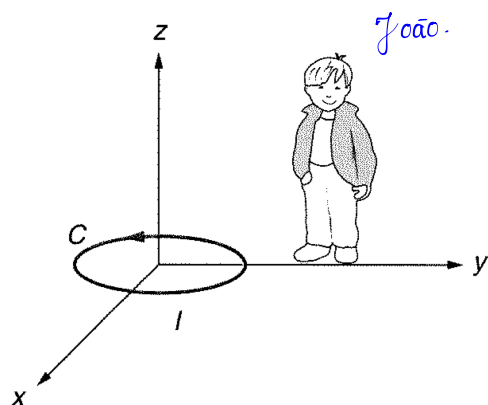
Abaixo daremos outro exemplo da relatividade entre os campos $\underline{E}/\underline{B}$.

Relatividade do tipo de campo de força observado.

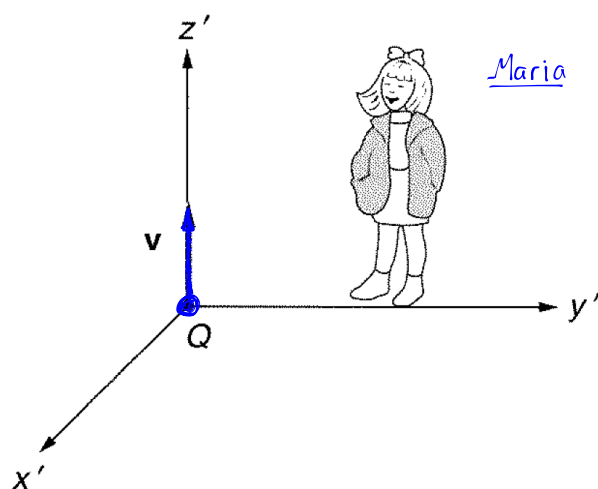
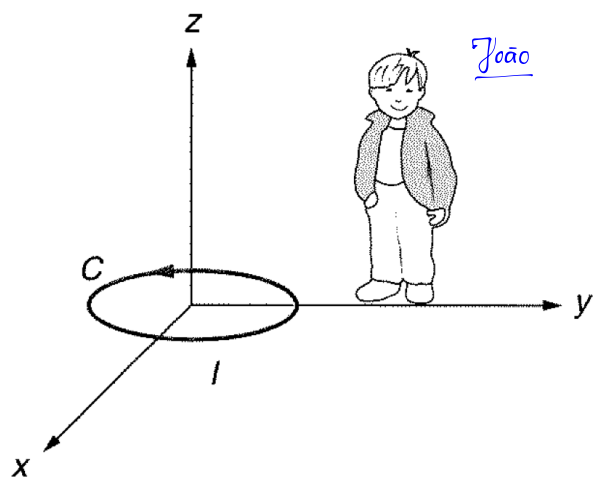
Vamos considerar dois pesquisadores, chamados João e Maria, realizando experimentos a fim de observarem interações de uma carga elétrica q com campos elétricos e magnéticos.

Nosso objetivo é de verificar o que esses pesquisadores concluem ao analisarem um mesmo experimento estando em referenciais diferentes.

Imagine então que João está em um laboratório e estabelece uma corrente constante através de uma bobina condutora, como ilustra do abaixo:



Adicionalmente, vamos também considerar que Maria está em repouso relativamente a uma carga elétrica Q :



O pesquisador João verifica que quando a carga Q está em repouso, nenhuma força atua sobre a carga, ou seja,



Para João não existe campo elétrico.

Continuando no observador João, quando a carga Q entra em movimento ele verifica uma força sobre a carga do tipo

$$\vec{F}_m = k_m q \vec{v} \times \vec{B} ; \text{ ou seja, João conclui que existe}$$

uma força do tipo magnética.

Resumindo: João verifica apenas campo magnético em seu referencial e apenas força magnética sobre Q.

Vamos agora ao referencial de Maria.

Repetindo os passos: Quando Maria e a carga Q estão em repouso em relação ao referencial de João $\Rightarrow$ nada acontece; nenhuma força é verificada por Maria. Maria sabe que existe um campo magnético constante (pode usar uma bússola para isso).

Vamos agora estabelecer velocidade $\vec{v}$ para a carga Q juntamente com Maria. Neste caso a carga continua com velocidade zero em relação à Maria, ou seja, Maria não observa força do tipo magnética

~~$q \vec{v} \times \vec{B}$~~ para Maria.

Mas obviamente a carga sofre uma força pois como vimos, nesta situação João mediu uma força, então Maria necessariamente tem que enxergar a carga sendo empurrada por alguma força.

Como a carga está em repouso relativamente à Maria, a força que ela observa é do tipo elétrica. Mas é uma força elétrica com característica diferente daquela entre cargas eletrostáticas, afinal não existe outra carga elétrica líquida nas proximidades.

$\Rightarrow$ Ela conclui que o campo magnético, que agora está variando em relação a ela, está produzindo campo elétrico em seu referencial.

Resumindo: João observa uma Força magnética do tipo $\vec{F}_M = k_M q \vec{v} \times \vec{B}$.

enquanto que Maria verifica um campo elétrico variável (pois a carga é empurrada de forma curva), como o próprio João vê (as duas vêm a mesma coisa acontecendo).

Adicionalmente, se a corrente na bobina muda com o tempo, qualquer que estiver em repouso em relação à carga verifica uma força, que só pode ser do tipo elétrica.

Em suma: O que um detecta como sendo Força magnética outro pode detectar como Força elétrica significando que têm uma origem comum.

Lei de Faraday

A lei de Faraday é uma equação para a força eletromotriz total em uma espira condutora submetida a um campo magnético variável.

Em geral não sabemos, para um campo magnético variável com campo vetorial $\vec{B}$ aleatório, o sentido exato do campo elétrico induzido em cada "pedaço" da bobina condutora. De fato nem sempre, como veremos, será possível calcular a força eletromotriz no circuito, estaremos limitados a algumas geometrias experimentais, ou hipotéticas, mais simples.

Exemplo para ilustrar as ideias acima:

Sabemos que quando percebemos campo magnético variando em nosso referencial, então campo elétrico é gerado pois se tivermos, digamos, uma carga elétrica em nossas mãos $\rightarrow$ sentiremos uma força motriz sobre ela.

A pergunta é: Se conhecermos a distribuição do campo magnético no espaço e como ele está variando, qual seria a distribuição vetorial do campo elétrico no espaço induzido $\vec{E}_{ind}$?

A fim de tentarmos chegar a alguma conclusão sobre a questão acima vamos utilizar um princípio fundamental da relatividade especial de Einstein $\rightarrow$

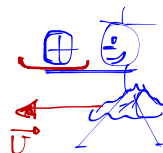
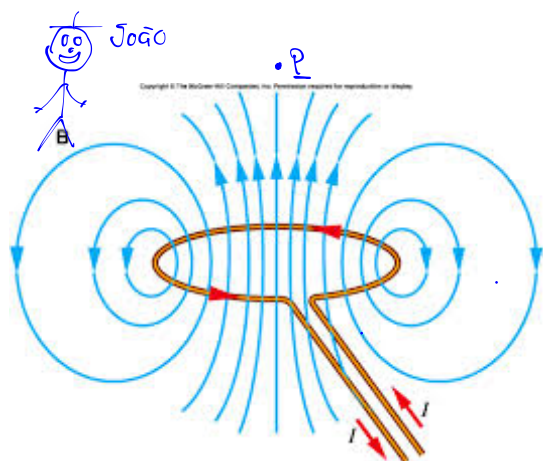
Todo observador em um referencial inercial enxerga a mesma verdade física - Em outras palavras, observadores em diferentes referenciais inerciais concordam entre si sobre a física (Força, aceleração, etc...) sobre os fenômenos que observam.

Seja assim, utilizando o exemplo acima para os pesquisadores João e Maria, onde João observa um campo magnético enquanto que Maria observa um campo elétrico devido à variação do campo magnético;
 $\Rightarrow$ Basta inferir que Maria enxerga o mesmo movimento da partícula carregada que João, apesar de observarem diferentes tipos de campos responsáveis pelo movimento.

Exemplo $\searrow$

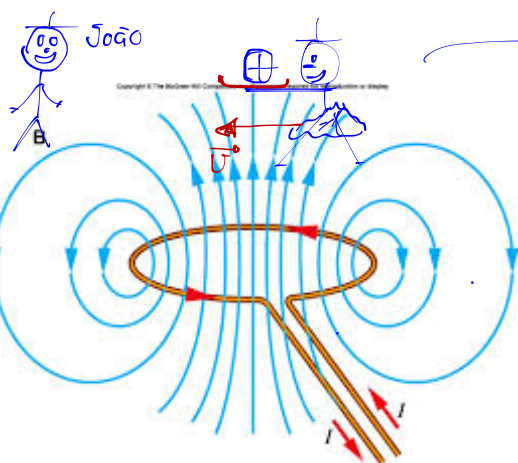
Ilustrando.

Vamos imaginar uma bobina com corrente estacionária como na ilustração abaixo, com o observador João em epouso com relação à bobina, enquanto que Marta se aproxima da bobina com velocidade $\vec{v}$, tendo uma carga positiva ($\oplus$) em uma bandeja (—).

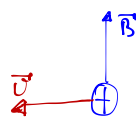
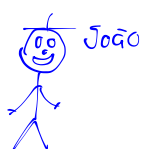


magnético vertical. Quando a bandeja com a carga chegar ao ponto P

Por simplicidade vamos considerar que a carga está presa na bandeja e só será liberada quando chegar ao ponto P , dentro da região de campo



o que observará João devido à ação do campo magnético sobre a carga elétrica em movimento?



$$\vec{F}_M, \text{João} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

tal que João vê a partícula sendo empurrada para dentro da página.

$$\rightarrow (\vec{F}_M = \otimes).$$

Como os dois necessariamente observam o mesmo acontecimento $\Rightarrow$ Maria também vê a carga sendo empurrada para dentro da página, mas como a partícula possui velocidade nula relativa

mente à Maria ela conclui que e^- devido a uma força elétrica.

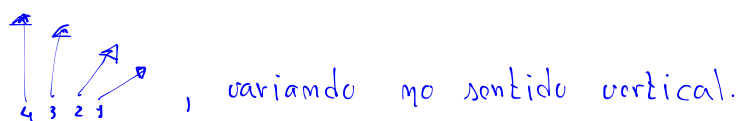
Como a força elétrica e^- colinear com o campo elétrico

$$\vec{F}_e = q \vec{E},$$

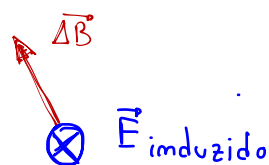
Concluimos que o campo elétrico está entrando na página sendo, portanto perpendicular ao "campo Magnético"

obs: Na verdade perpendicular à variação do campo magnético,

Notar que



= Pegando $\vec{B}_4 - \vec{B}_1$, como a variação do campo no referencial de Maria



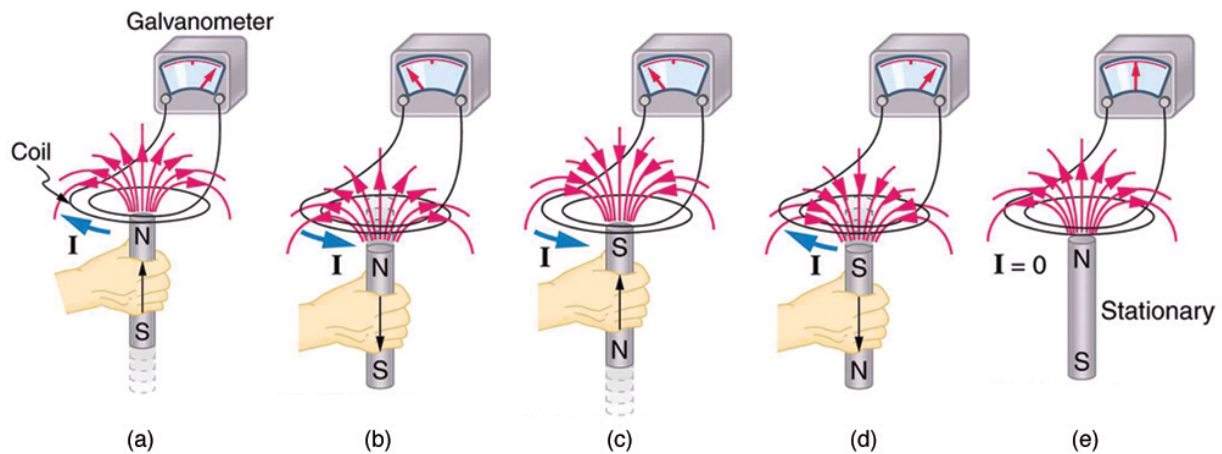
, o campo elétrico induzido é sempre perpendicular à variação de campo magnético.

Nota: Não faz sentido analisarmos $\vec{E}_{ind}$ com relação à velocidade, visto que $\vec{v} = \vec{0}$ no referencial de Maria.

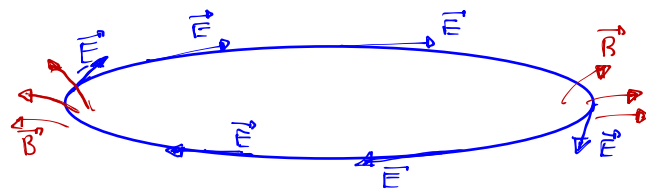
Conclusões adicionais: Podemos concluir, baseados no experimento mental acima, que:

* Só podemos dizer que existe campo elétrico do ponto de vista da carga, ou seja, o que percebemos como campo magnético a carga sente como elétrico (esta também é a conclusão que chegamos através da relatividade especial)

* Quando aproximamos um condutor de um ímã (ou eletroímã), na simetria ilustrada abaixo



⇒ O campo elétrico induzido ocorre paralelamente (tangenciando ponto a ponto) ao círculo do fio:



Vale notar que variação de $\vec{B}$ necessariamente implica num aumento (ou diminuição - dependendo da velocidade relativa) do número de linhas de campo magnético atravessando a área delimitada pelo anel.

importante

{ Em outras palavras, aumento ou diminuição do Fluxo magnético pela área do anel.



Vamos rever o fato exposto qualitativamente acima utilizando as equações matemáticas desenvolvidas previamente.

Do ponto de vista de Maria a Força sobre a carga é devida a um Campo elétrico induzido

$$\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}_{ind.}$$

Do ponto de vista de João $\Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_m$

$$\Rightarrow \vec{F}_m = K_M \cdot q \vec{v} \times \vec{B}$$

" K_M devido à nossas escolhas de unidades"

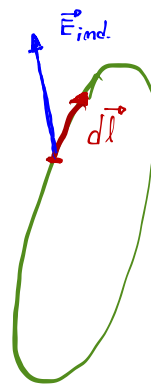
Essas forças devem ser iguais pois são medidas de referenciais inerciais.

$$\Rightarrow q \vec{E}_{ind.} = K_M q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{ind.} = K_M \vec{v} \times \vec{B}$$

Agora consideremos um amper condutor e tomemos, em um ponto aleatório sobre o am, a projeção do campo elétrico induzido sobre um elemento de comprimento do am, ou seja,

$$\vec{E}_{ind.} \cdot d\vec{l}$$

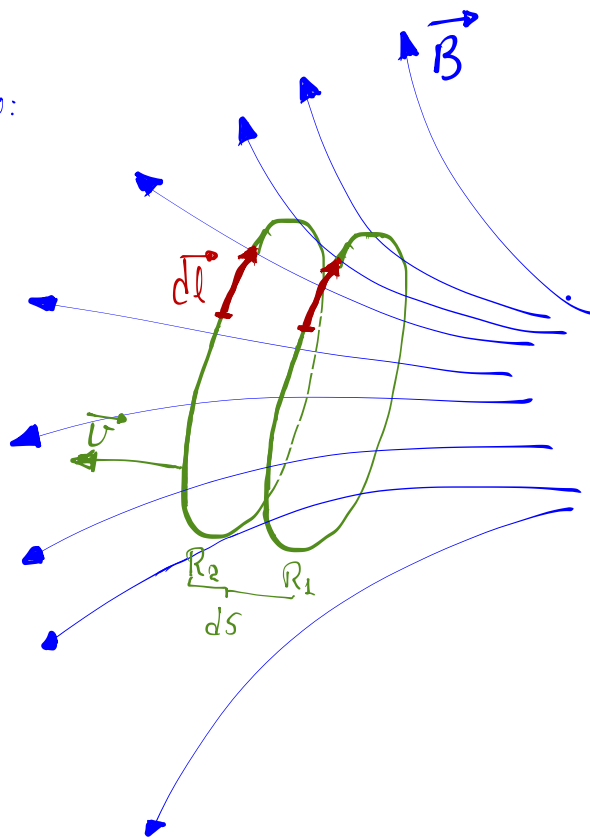


Então vamos somar todas as contribuições ao redor do am:

$$\oint \vec{E}_{ind.} \cdot d\vec{l} \quad , \text{ como } \vec{E}_{ind.} = K_M \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow \oint \vec{E}_{ind.} \cdot d\vec{l} = \oint K_M (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Ilustrando:



Na equação acima $\vec{v}$ = velocidade do amel ; $\vec{B}$ = Campo magnético
e $d\vec{l}$ = elemento de comprimento do amel.

$\Rightarrow R_2 - R_1 =$ deslocamento do amel dS .

então $\vec{v} = \frac{d\vec{S}}{dt}$

$$\Rightarrow \oint \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{l} = \kappa_M \oint \left(\frac{d\vec{S}}{dt} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{l}$$

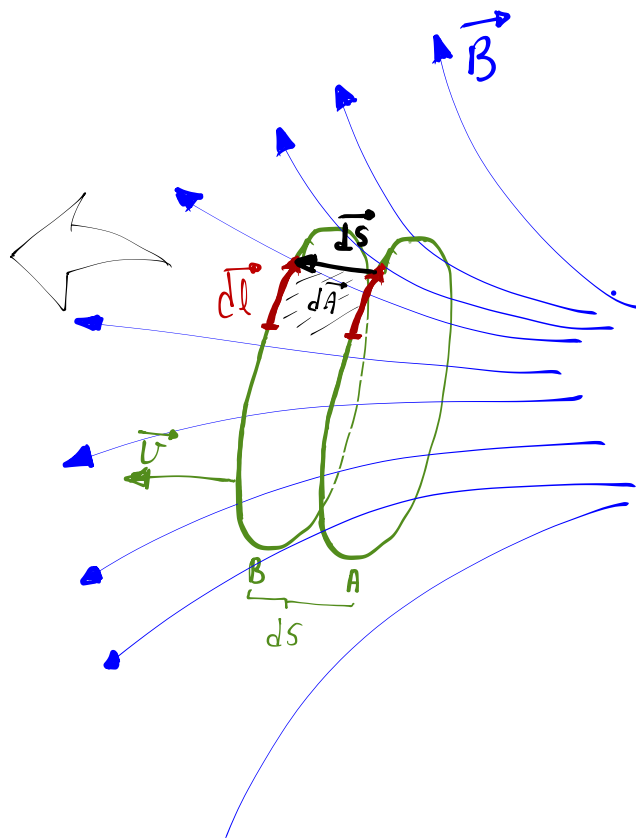
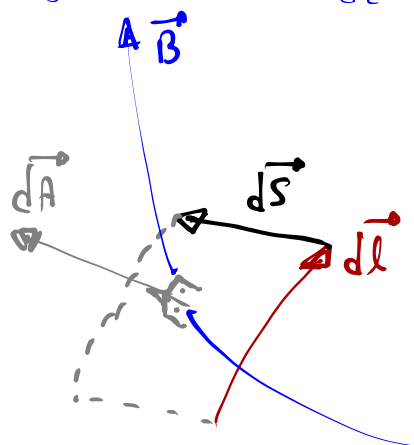
$$\oint \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{l} = \kappa_M \frac{d}{dt} \oint (d\vec{S} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Usando a igualdade do produto triplo

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = -(\vec{A} \times \vec{C}) \cdot \vec{B} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}$$

temos que: $(d\vec{S} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = - (d\vec{S} \times d\vec{l}) \cdot \vec{B} = (d\vec{l} \times d\vec{S}) \cdot \vec{B}$

Portanto:
$$\oint \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \frac{d}{dt} \oint (\vec{dl} \times d\vec{S}) \cdot \vec{B}$$



Nota-se, com o auxílio da ilustração, que

$(\vec{dl} \times d\vec{S}) \cdot \vec{B}$ corresponde ao fluxo de $\vec{B}$ através da área rachurada $d\vec{A}$.

Mas note que estas linhas correspondem exatamente às linhas que estavam passando por dentro do anel quando ele estava no ponto A e que foram para fora do anel devido ao deslocamento do anel de $\vec{R}_1 \rightarrow \vec{R}_2$. Em outras palavras, corresponde a uma variação do fluxo magnético na região $d\vec{A}$.

⇒ Somando todas as áreas temos o total de fluxo que sairá da região interna do anel.

Na equação:

$$\oint \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \frac{d}{dt} \oint d\Phi_B$$

$d\Phi_B$ porque o integrando corresponde a $d\vec{A}$ apenas.

$$\rightarrow \oint \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \frac{d}{dt} (\Phi_B)$$

Na análise acima não fizemos considerações (ou definições) a cerca da utilização de um sinal para definir o sentido de movimento da corrente elétrica induzida no anel.

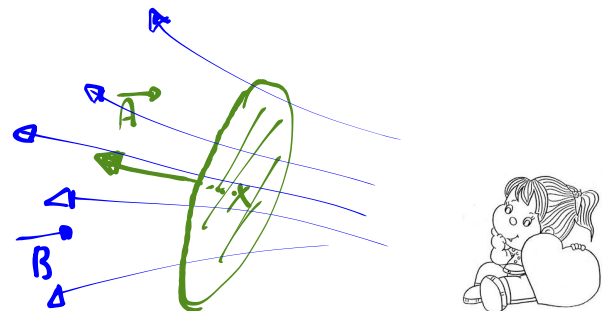
Uma análise direta na ilustração acima deixa claro (aplique $\vec{v} \times \vec{B}$) que se $\vec{v}$ é como na Figura, então o fluxo de $\vec{B}$ pelo anel está diminuindo e uma carga positiva adquire movimento anti-horário, do ponto de vista do observador - digamos - como ilustrado abaixo

afinal $\oint \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{l}$

que é a componente do campo induzido ao longo do circuito condutor.

Neste caso, no sentido → horário - do ponto de vista de nossa observadora.

Para ela, portanto,



se definirmos que a força eletromotriz deve ser positiva quando gerar uma corrente horária e negativa quando gerar uma corrente anti-horária, relativamente a um dado observador, então inferimos o sinal como segue:

$$\mathcal{E}_{mf} = \oint \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{l} = - \kappa_m \frac{d}{dt}(\Phi_B) \quad (\text{Eq. 4 - Maxwell})$$

Sumarizando as equações de Maxwell em um sistema eletrostático, em sua forma integral:

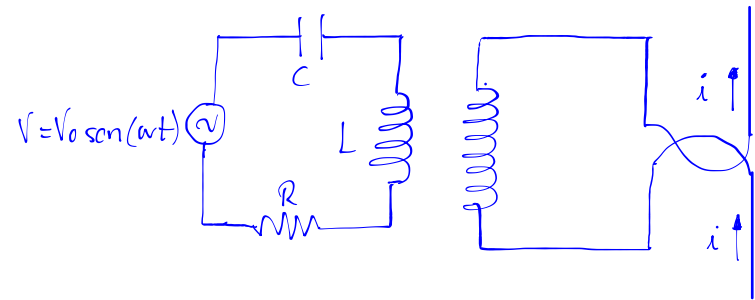
$$\left\{ \begin{array}{l} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi q \\ \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \\ \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 4\pi K_M I + K_M \frac{d}{dt}(\phi_E) \\ \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -K_M \frac{d}{dt}(\phi_B) \end{array} \right.$$

Nota: Ainda não encontramos o valor de K_M .
Para isso vamos obter as equações de onda para $E(t)$ e $B(t)$.

Obtenção das Equações de onda através das Equações de Maxwell.

Em princípio, vamos por um caminho menos abstrato utilizando um experimento mental de produção de uma onda magnética proveniente de uma antena emissora como segue:

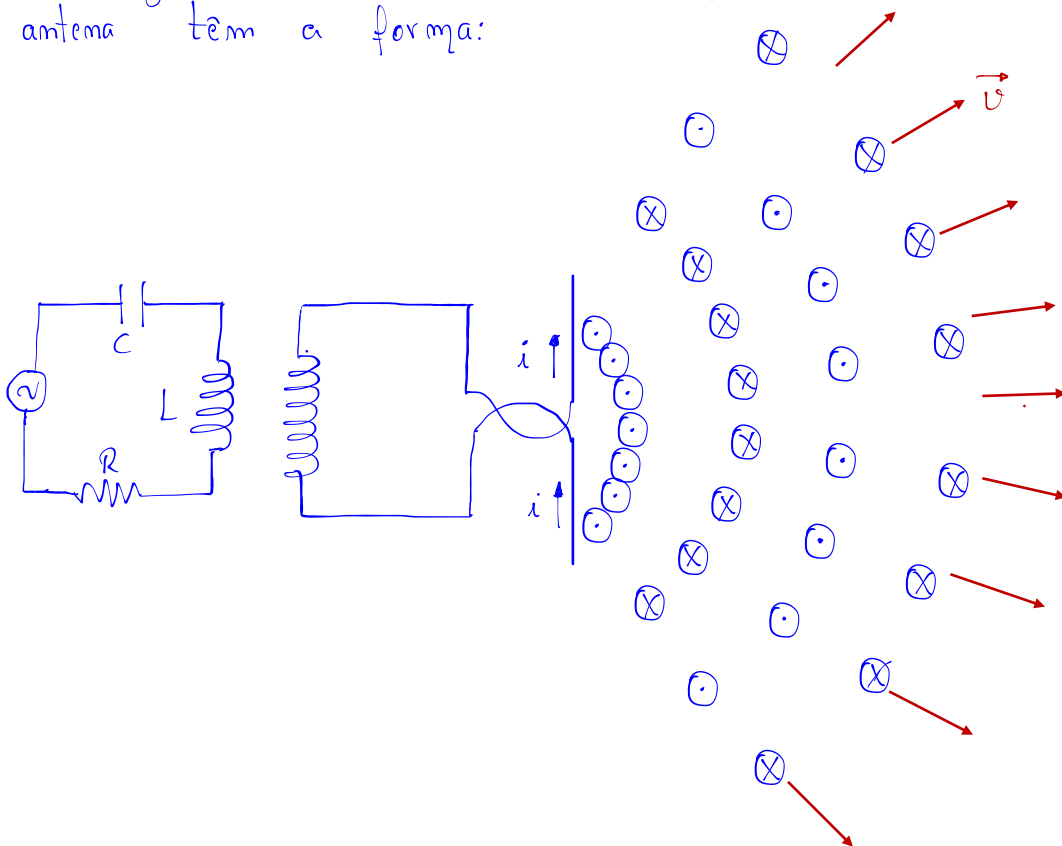
Esquema simplificado de uma antena emissora de onda eletromagnética:



Como a fonte varia no tempo
 $\Rightarrow i = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$

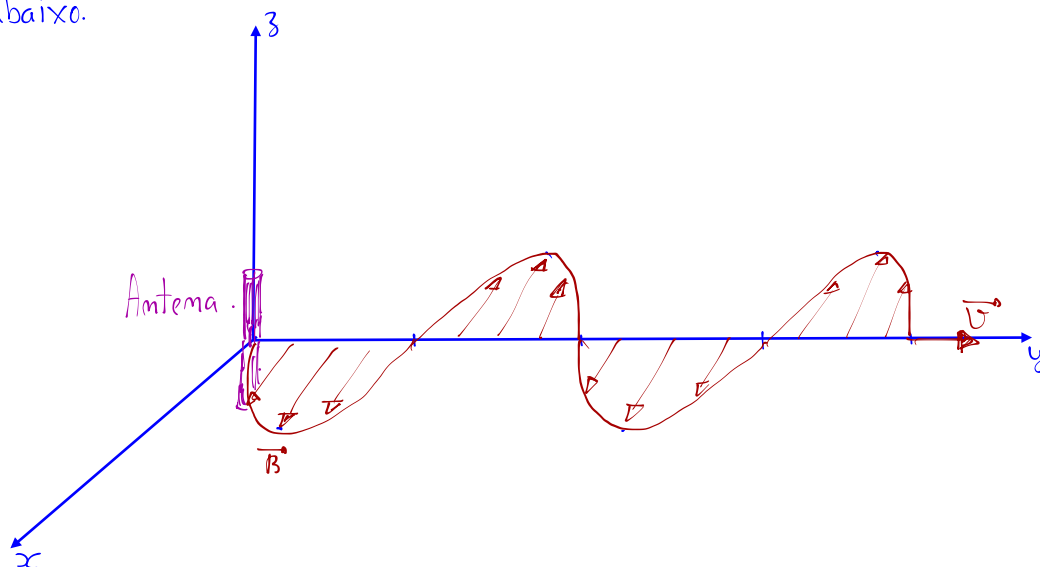
Sendo φ um ângulo de fase.

Mas sabemos que corrente em um fio produz campo magnético em sua vizinhança. As linhas de campo provenientes de uma "pequena" antena têm a forma:



$\Rightarrow$ A corrente oscilante produz um campo magnético oscilante que se propaga com uma velocidade, no momento desconhecida, v .

Vamos considerar que a antena emite como na geometria sugerida abaixo.



Mas como sabemos, através das equações de Maxwell, $\vec{B}$ varia com $\vec{E}$ e vice-versa.

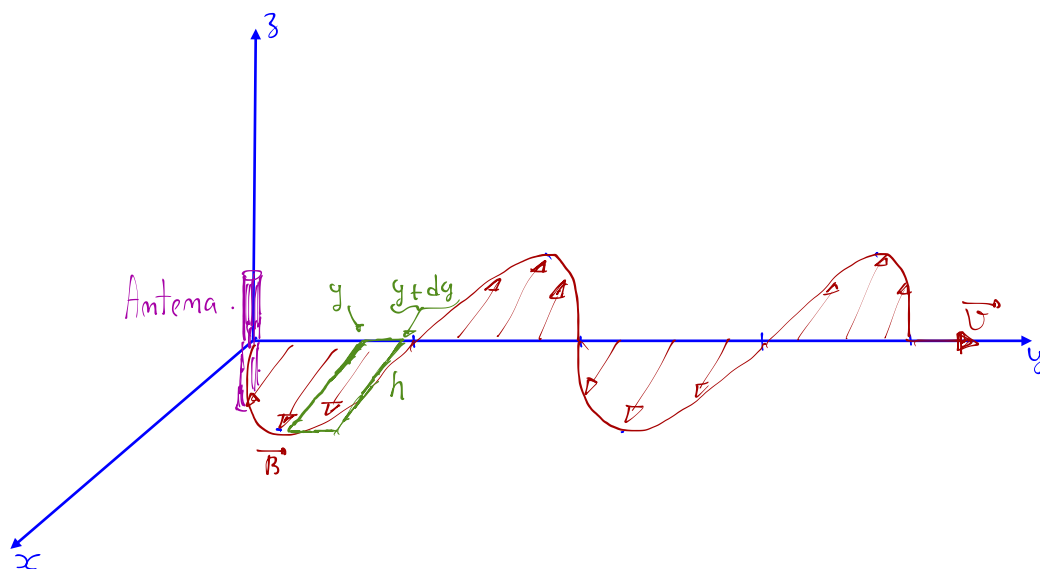
O campo $\vec{B}$ na representação acima pode ser pensado como originado da variação de um campo elétrico. Assim apliquemos, em uma região do espaço, a relação:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt} ;$$

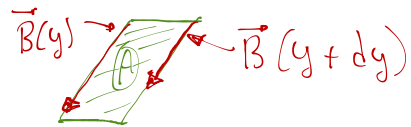
obs: Como estamos no espaço livre
 $\Rightarrow I=0$ e o termo de corrente
 de não colabora.

Vamos aplicar esta equação em um retângulo infinitesimal como representado abaixo.

era



⇒ Note que o retângulo em questão é paralelo ao campo magnético $\vec{B}$, mas que $\vec{B}$ é mais forte de um lado (em x menor) que outro.



A área do retângulo é $A = h \cdot dy$.

O campo elétrico gerador de $\vec{B}$ deve estar na vertical com sentido positivo em $\hat{z}$ (verificar na equação de indução).

$$\Rightarrow \phi_E = E(y) \cdot h \cdot dy = E \cdot h \cdot dy \quad E \rightarrow E(y, t).$$

$$\text{A integral } \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(y) \cdot h - B(y+dy) \cdot h$$

$$\text{Mas } B(y+dy) = B(y) + dB$$

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \cancel{B(y) \cdot h} - \cancel{B(y) \cdot h} - dB \cdot h = -dB \cdot h$$

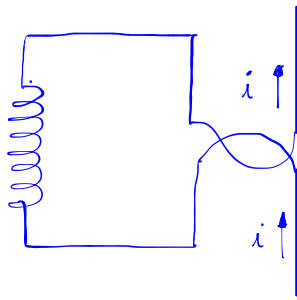
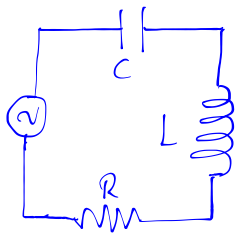
$$\text{Mas } \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \frac{d(\phi_E)}{dt}$$

$$\text{Então: } -dB \cdot h = \mu_0 \frac{d(Ehdy)}{dt}$$

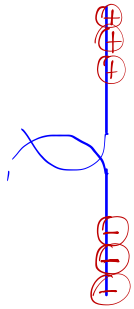
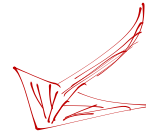
$$-\frac{dB}{dy} = \mu_0 \frac{dE}{dt}$$

— 1 —

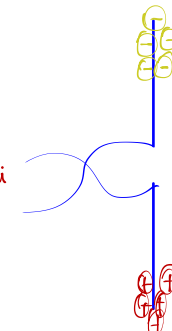
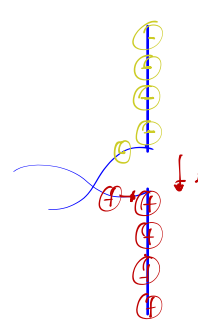
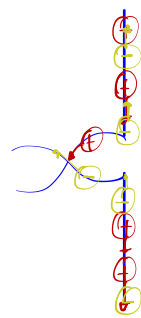
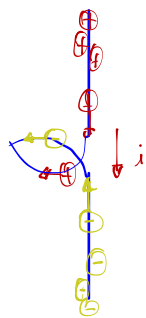
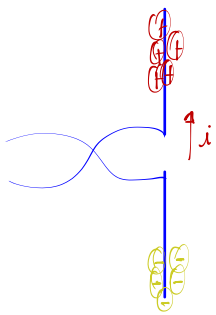
Por outro lado, a antena emissora também pode ser vista como emissora de campo elétrico, afinal, corrente nas extremidades da antena significa armazenamento de cargas com diferentes sinais, oscilando no tempo, como ilustrado abaixo:



Cargas positivas sendo armazenadas na parte de cima

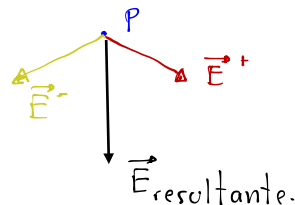
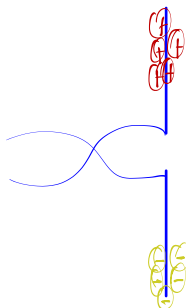


Mas como a corrente varia na forma $\sin(\omega t)$, com o passar do tempo o armazenamento de cargas inverte com uma frequência $\underline{\omega}$.

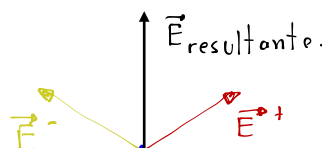
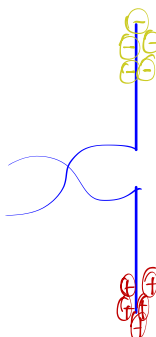


$i=0$, etc...

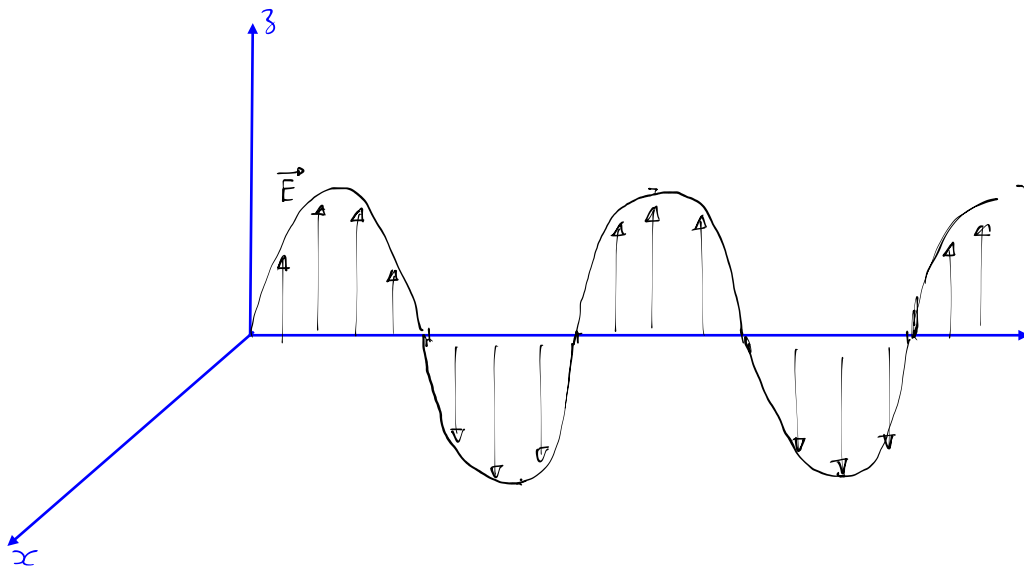
Quando a antena possui cargas positivas na parte de cima, então temos campo elétrico em um ponto P, como segue:



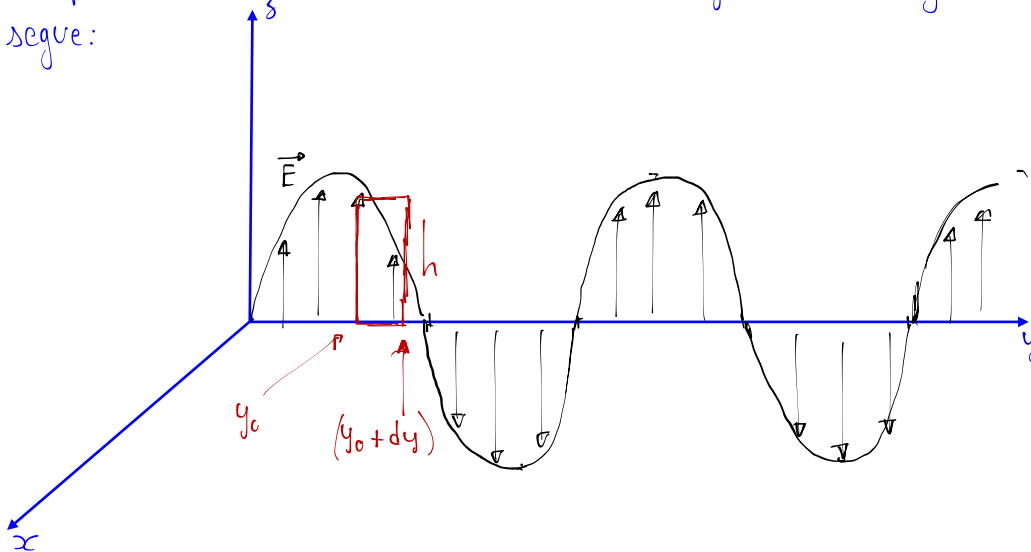
e quando do contrário



Esta dinâmica produz campo elétrico no espaço como segue:



Aqui, assim como fizemos para o campo magnético, podemos considerar que o campo $\vec{E}$ é originado de uma variação de fluxo do campo $\vec{B}$. Tomemos então um retângulo de largura infinitesimal, como segue:



Neste caso vamos usar $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 \frac{d(\phi_B)}{dt}$.

$$\phi_B = B \cdot h \cdot dy$$

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} &= E(y_0 + dy) \cdot h - E(y_0) \cdot h \\ &= \cancel{E(y_0) \cdot h} + dE \cdot h - \cancel{E(y_0) \cdot h} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = dE \cdot h$$

$$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\kappa_m \frac{d}{dt}(\Phi_B)$$

$$dE \cdot h = -\kappa_m \frac{d}{dt}(B h dy)$$

$$\boxed{\frac{dE}{dy} = -\kappa_m \frac{dB}{dt}}$$

Sumarizando, temos:

$$\underbrace{\frac{dB}{dy} = -\kappa_m \frac{dE}{dt}}_{(1)}$$

$$\underbrace{\frac{dE}{dy} = -\kappa_m \frac{dB}{dt}}_{(2)}$$

$$\text{de (1)} \Rightarrow \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = -\kappa_m \frac{\partial^2 E}{\partial y \partial t}$$

$$\text{de (2)} \quad \frac{\partial^2 (E)}{\partial t \partial y} = -\kappa_m \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = +\kappa_m^2 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

Esta é uma equação de onda do tipo:

$$B = B_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\text{onde: } v_{\text{onda}} = \frac{1}{\kappa_m}$$

Portanto: $v_{\text{onda eletromagnética}} = c$, e as equações

de máxwell no sistema eletrostático com constante elétrica igual a unidade tem a forma:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi q$$

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{d}{dt}(\phi_E)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{1}{c} \frac{d}{dt}(\phi_B)$$

onde c = velocidade da onda eletromagnética.

