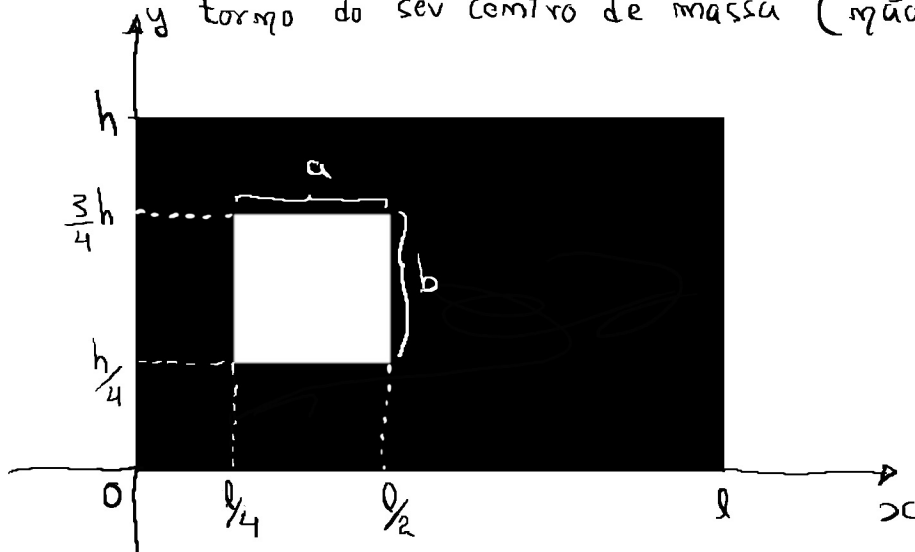


(1) Calcular o momento de inércia da figura abaixo em torno do seu centro de massa (não conhecido).



1º) Encontrar a posição do centro de massa.

⇒ O quadrado branco é um buraco, logo o centro de massa está deslocado para a direita do centro.

⇒ Existem vários procedimentos "diferentes" para se calcular o CM. Quando possível, o uso de simetrias ajuda a simplificar os procedimentos.

Ex: Vamos imaginar duas placas independentes, de mesma densidade ⇒ a preta e a branca. "Sabemos" que se a placa não tivesse o buraco seu centro de massa estaria em

$$X_{cm} = \frac{l}{2} \quad \text{e} \quad Y_{cm} = \frac{h}{2} \quad \text{"Simetria"}$$

Como temos duas peças compondo a placa (em tese).

$$\Rightarrow m_{branca} \cdot x_{branca, cm} + m_{preta} \cdot x_{preta, cm} = (m_{branca} + m_{preta}) \cdot X_{cm}$$

⇒ A única incógnita é $x_{preta, cm}$ ⇒ Que é o que queremos calcular

$$m_{\text{branca}} \cdot x_{\text{branca, cm}} + m_{\text{preta}} \cdot x_{\text{preta, cm}} = (m_{\text{branca}} + m_{\text{preta}}) \cdot x_{\text{cm}}$$

$$\Rightarrow x_{\text{branca, cm}} = \frac{l/2 + l/4}{2}$$

$$x_{\text{branca, cm}} = \frac{l}{4} + \frac{l}{8} = \frac{2l+l}{8} = \frac{3l}{8}$$

$$m_{\text{branca}} = \sigma \cdot a \cdot b = \sigma \cdot \left(\frac{3}{4}h - \frac{1}{4}h \right) \cdot \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{4} \right)$$

$$= \sigma \cdot \frac{1}{2}h \cdot \frac{1}{4}l = \frac{\sigma \cdot h \cdot l}{8} *$$

Obs: σ pode ser colocado em função da massa da placa preta (que na realidade é o que existe e pode ser pesada).

$$\Rightarrow m_{\text{preta}} = \sigma \cdot (\text{Área da placa preta})$$

$$m_{\text{preta}} = \sigma \cdot \left[\underbrace{l \cdot h}_{\text{Total}} - \underbrace{a \cdot b}_{\text{só da branca}} \right]$$

Vimos acima que $a \cdot b = \frac{h \cdot l}{8} *$

$$m_{\text{preta}} = \sigma \left[hl - \frac{hl}{8} \right] = \sigma \cdot hl \left(1 - \frac{1}{8} \right)$$

$$m_{\text{preta}} = \frac{7}{8} \cdot \sigma \cdot h \cdot l \quad \Rightarrow \sigma = \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{h \cdot l} \cdot m_{\text{preta}}$$

em (*)

$$\Rightarrow m_{\text{branca}} = \frac{m_{\text{preta}} \cdot \cancel{8}}{\cancel{h \cdot l} \cdot 7} \cdot \frac{\cancel{h \cdot l}}{\cancel{8}}$$

$$m_{\text{branca}} = \frac{1}{7} m_{\text{preta}}$$

Voltando

$$m_{\text{branca}} \cdot x_{\text{branca, cm}} + m_{\text{preta}} \cdot x_{\text{preta, cm}} = (m_{\text{branca}} + m_{\text{preta}}) \cdot X_{\text{cm}}$$

$$x_{\text{preta, cm}} = \frac{(m_{\text{preta}} + m_{\text{branca}}) \cdot X_{\text{cm}} - m_{\text{branca}} \cdot x_{\text{branca, cm}}}{m_{\text{preta}}}$$

$$x_{\text{preta, cm}} = \frac{(\cancel{m_{\text{preta}}} + \cancel{m_{\text{preta}}/7}) \cdot \frac{l}{2} - \cancel{m_{\text{preta}}/7} \cdot \frac{3}{8} \cdot l}{\cancel{m_{\text{preta}}}}$$

$$x_{\text{preta, cm}} = \left(1 + \frac{1}{7}\right) \frac{l}{2} - \frac{3l}{56}$$

$$x_{\text{preta, cm}} = \left(\frac{8}{14} - \frac{3}{56}\right) \cdot l$$

$$x_{\text{preta, cm}} = \frac{32 - 3}{56} l = \frac{29}{56} l$$

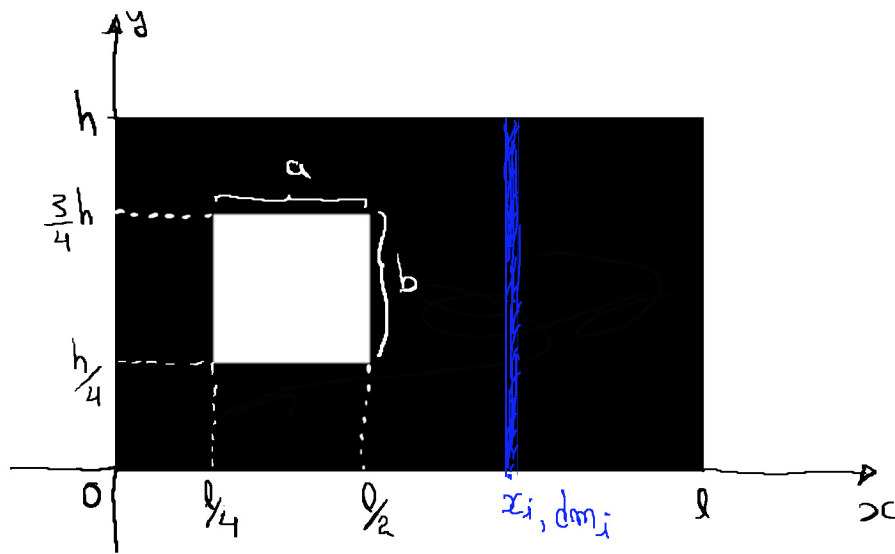
$$x_{\text{preta, cm}} \approx 0,52 \cdot l$$

Obs: ligeiramente deslocado para a direita do centro.

— " —

Vamos obter $x_{\text{preta, cm}}$ de outra forma.





Outro procedimento:

$$\sum_i dm_i \cdot x_i = M \cdot x_{cm}$$

posição do dm_i

massa da placa posicionada em x_i

Aqui vamos considerar apenas a placa preta - pa^- com puro.

Como é contínuo $\Rightarrow \sum \rightarrow \int$

$$M \cdot x_{cm} = \int_0^l dm_i \cdot x_i$$

mas $dm_i = \sigma \cdot h \cdot dx$, na região sem buraco

e $dm_i = \sigma \cdot (h-b) \cdot dx$ na região com buraco.

$$\Rightarrow M \cdot x_{cm} = \int_0^{l/4} \sigma \cdot h \cdot dx \cdot x + \int_{l/4}^{l/2} \sigma (h-b) \cdot dx \cdot x + \int_{l/2}^l \sigma \cdot h \cdot dx \cdot x$$

$$\Rightarrow M \cdot x_{cm} = \sigma h \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{l/4} + \sigma (h-b) \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_{l/4}^{l/2} + \sigma h \left[\frac{x^2}{2} \right]_{l/2}^l$$

$$M \cdot x_{cm} = \sigma h \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{l/4} + \sigma(h-b) \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_{l/4}^{l/2} + \sigma h \left[\frac{x^2}{2} \right]_{l/2}^l$$

$$M \cdot x_{cm} = \frac{\sigma \cdot h}{2} \left(\frac{l^2}{16} \right) + \frac{\sigma(h-b)}{2} \cdot \left(\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{16} \right) + \frac{\sigma h}{2} \left(l^2 - \frac{l^2}{4} \right)$$

$$M \cdot x_{cm} = \left[\frac{\sigma h}{2} \cdot \left(\frac{1}{16} + 1 - \frac{1}{4} \right) + \frac{\sigma \cdot (h-b)}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) \right] \cdot l^2$$

$$\text{Vamos que } b = \frac{3}{4}h - \frac{1}{4}h = \frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow h-b = h - \frac{h}{2} = \frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow M \cdot x_{cm} = \left[\frac{\sigma h}{2} \cdot \left(\frac{1+16-4}{16} \right) + \frac{\sigma \cdot h}{4} \left(\frac{4-1}{16} \right) \right] \cdot l^2$$

$$M \cdot x_{cm} = \frac{\sigma \cdot h}{2} \left[\frac{13}{16} + \frac{3}{32} \right] \cdot l^2 = \frac{\sigma \cdot h}{2} \cdot \frac{26+3}{32} \cdot l^2$$

$$M \cdot x_{cm} = \frac{\sigma \cdot h}{2} \cdot \frac{29}{32} \cdot l^2$$

M é a massa da placa preta.

$$\Rightarrow M = \sigma \cdot h \cdot l - \sigma \cdot a \cdot b = \sigma \left(hl - \frac{h}{2} \cdot \frac{l}{4} \right)$$

$$M = \sigma \cdot h \cdot l \left(\frac{8-1}{8} \right)$$

$$M = \frac{7}{8} \cdot \sigma \cdot h \cdot l$$

$$\Rightarrow M \cdot x_{cm} = \frac{5 \cdot h}{2} \cdot \frac{29}{32} \cdot l^2$$

$$\text{e } M = \frac{7}{8} \cdot 5 \cdot h \cdot l$$

$$\Rightarrow x_{cm} = \frac{8}{7} \cdot \frac{\cancel{5 \cdot h \cdot l}^2}{\cancel{5 \cdot h \cdot l}} \cdot \frac{29}{64}$$

$$x_{cm} = \frac{29}{7 \cdot 8} \cdot l = \frac{29}{56} \cdot l$$

Que é o mesmo resultado anterior.

— " —

Voltemos à questão original: I_{cm}

Sabemos agora que $x_{cm} = \frac{29}{56} \cdot l$

e $y_{cm} = \frac{h}{2}$ "Simetria em y".

$$\Rightarrow I_{cm - \text{Buraco}} = I_{cm - \text{sem buraco}} - I_{\text{buraco}}$$

"tudo relativo ao ponto $P\left(\frac{29}{56}l, \frac{h}{2}\right)$."

Cálculo de $I_{\text{sem buraco}}$ relativo ao ponto P.

"Aplicar eixos paralelos"

Situando:

Queremos calcular I_{cm} da placa com buraco.

→ já sabemos o ponto onde está localizado o CM.

$$x_{cm} = \frac{29}{56} l \quad ; \quad y_{cm} = \frac{h}{2}$$

$$I_{cm - \text{buraco}} = I_{cm - \text{sem buraco}} - I_{\text{buraco}}$$

$$I_{cm - \text{sem buraco}} = I \text{ da placa completa em torno do ponto } P(x_{cm}, y_{cm}).$$

$$I_{cm - \text{sem buraco}} = I_{\text{Placa completa em torno do centro}} + M \cdot d^2$$

↳ sem buraco

Onde d = distância do centro da placa até $P(x_{cm}, y_{cm})$

$$\vec{d} = \left(\frac{29}{56} l \hat{x} + \frac{h}{2} \hat{y} \right) - \left(\frac{l}{2} \hat{x} + \frac{h}{2} \hat{y} \right)$$

$$\vec{d} = \left(\frac{29}{56} - 0,5 \right) \cdot l \hat{x}$$

$$d^2 = \left(\frac{29}{56} - 0,5 \right)^2 \cdot l^2$$

$$e \quad M = 5 \cdot h \cdot l$$

Adicionalmente sabe-se (tabela ou cálculo integral simples)

que $I_{\text{placa retangular plana}} = \frac{M \cdot (h^2 + l^2)}{12}$

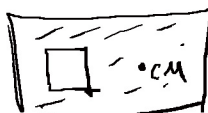
$$\Rightarrow I_{\text{cm - sem buraco}} = \frac{M (h^2 + l^2)}{12} + M \cdot \left(\frac{29}{56} - 0,5 \right)^2 \cdot l^2$$

$$I_{\text{buraco}} = \frac{m_{\text{buraco}} \cdot (a^2 + b^2)}{12} + m_{\text{buraco}} \left(\frac{29}{56} - \frac{3}{8} \right)^2 \cdot l^2$$

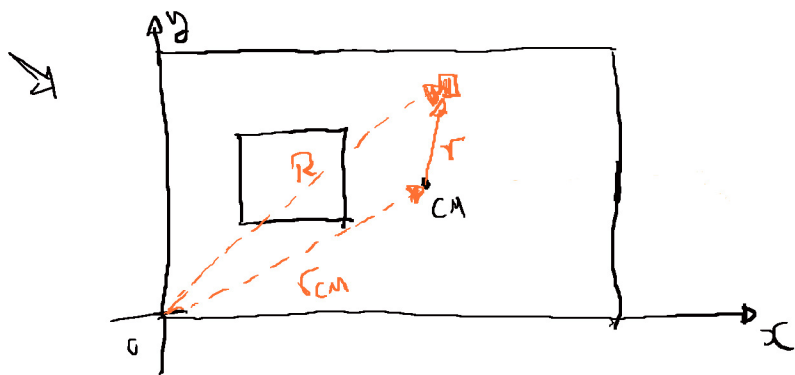
$\Rightarrow$ Sendo $m_{\text{buraco}} = \sigma \cdot a \cdot b$ ou $\sigma \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{h}{2} = \sigma \cdot \frac{l \cdot h}{8}$

onde $a = \frac{l}{4}$ e $b = \frac{h}{2}$

$$\Rightarrow I_{\text{cm}} = \frac{\sigma \cdot h \cdot l (h^2 + l^2)}{12} + \sigma h l \left(\frac{29}{56} - 0,5 \right)^2 \cdot l^2 - \frac{\sigma h l}{8 \cdot 12} \left(\frac{l^2}{16} + \frac{h^2}{4} \right) - \frac{\sigma h l}{8} \left(\frac{29}{56} - \frac{3}{8} \right)^2 l^2$$

Podemos realizar o cálculo de I_{cm}  através de cálculo integral direto. (Neste caso a simetria permite).

$$\Rightarrow I_{\text{cm}} = \int_V dm \cdot r^2 = \int \sigma \cdot dx \cdot dy \cdot \left[(x - x_{\text{cm}})^2 + (y - y_{\text{cm}})^2 \right]$$



$$\Rightarrow I_{CM} = \int \sigma \cdot (x - x_{cm})^2 dx dy + \int \sigma (y - y_{cm})^2 dx dy$$

$$I_{CM} = \int \sigma (x^2 - 2x x_{cm} + x_{cm}^2) dx dy + \int \sigma (y^2 - 2y y_{cm} + y_{cm}^2) dx dy$$

$$= \int \sigma x^2 dx dy - \int 2\sigma x_{cm} x dx dy + \int \sigma x_{cm}^2 dx dy$$

$$+ \int \sigma y^2 dx dy - \int 2\sigma y_{cm} y dx dy + \int \sigma y_{cm}^2 dx dy$$

Observar que dependendo da posição $\underline{x}$ o limite de integração em y deve ser por partes - devido ao buraco - e vice-versa.

Exemplo: Como ficaria a integral $\int \sigma x^2 dx dy$?

$$\Rightarrow \int_x \int_y \sigma x^2 dx dy = \sigma \int_x x^2 dx \cdot \int_y dy$$

$\Rightarrow$ para x entre $\frac{l}{4}$ e $\frac{l}{2}$ $\Rightarrow y$ não passa pelos valores entre $\frac{h}{4}$ até $\frac{3}{4}h$.

$$\begin{aligned}
 \int \sigma x^2 dx dy &= \sigma \int_0^{l/4} x^2 dx \int_0^h dy + \sigma \int_{l/4}^{l/2} x^2 dx \cdot \left[\int_0^{h/4} dy + \int_{\frac{3}{4}h}^h dy \right] \\
 &\quad + \sigma \int_{l/2}^l x^2 dx \cdot \int_0^h dy
 \end{aligned}$$

Aparentemente a solução completa para I_{cm} será um trabalho braçal gigante - por isso paro por aqui e fico com a solução anterior.

FIM.