Energia: O que é?

Muitos dos conceitos estudados em cinemática e leis de newton são bastante familiares pois convivemos de uma forma direta com estes conceitos. Exemplos: Velocidade e posição. Contudo, alguns conceitos, com os quais também confivemos nos passam uma falsa intuição, ou seja, um falso sentimento de que sabemos o que representam. Um exemplo comum é o conceito de energia. Faz parte do nosso cotidiano, estando associado a vários termos diferentes

1 - Energia elétrica

2 - Energia térmica

3 - Energia aeólica

4 - Energia nuclear

5 - Energia gravitacional

6 - etc...

Se tantas fontes diferentes estão associadas ao conceito de energia, afinal, para que serve e o que é energia?

As perguntas acima estão na ordem correta, pois historicamente primeiro percebemos que algumas quantidades, baseadas nas leis de newton se mostravam especialmente úteis e simplificavam a solução de problemas antes muito complexos. Posteriormente, estas quantidades foram batizadas (exemplo, energia e momento).

Que quantidade baseada nas leis de Newton representa energia?

As leis de newton foram desenvolvidas para descrição do movimento e suas causas. Portanto, entre todos os tipos de energia citados acima, estaremos interessados em uma quantidade associada ao movimento de uma partícula (ou sistema de particulas) , ou seja, a energia chamada de cinética.

Obtenção das leis de conservação.

Vamos considerar um sistema formado por particulas perfeitamente elásticas (Todos os movimentos serão creditados unicamente ao movimento de translação das partículas, não havendo movimentos internos em cada partícula).

Para cada partícula pertencente ao sistema, digamos a n-ésima partícula, vale que

$$\vec{F}_n = m_n \cdot \vec{a}_n$$

Para um sistema isolado (Não existem forças externas ao sistema, ou seja, toda força será devido à contatos entre partículas internas ao sistema).

⇒ A força resultante sobre o sistema será nula, logo:

$$\sum_m \vec{F}_m = \vec{F}_{\text{Resultante}} = \text{zero}$$

Portanto $\sum_m m_m \vec{a}_m = \text{zero}$

$$\Rightarrow \quad m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} + \cdots + m_m \frac{d\vec{v}_m}{dt} = 0 \qquad \text{multiplicando tudo por } dt$$

$$m_1 d\vec{v}_1 + m_2 d\vec{v}_2 + \cdots + m_m d\vec{v}_m = 0 \qquad \text{, integrando temos:}$$

$$\int m_1 d\vec{v}_1 + \int m_2 d\vec{v}_2 + \cdots + \int m_m d\vec{v}_m = 0$$

$$\Rightarrow \quad m_1 \Delta\vec{v}_1 + m_2 \Delta\vec{v}_2 + \cdots + m_m \Delta\vec{v}_m = 0$$

Isto significa que a quantidade $m_m \Delta\vec{v}_m$ associada à n-ésima partícula só pode mudar de uma quantidade A se uma quantidade $-A$ for transferida para outra particula, de forma que a soma de todas as variações seja zero.

A quantidade $m\vec{v}$ é definida momento linear. Assim o momento linear total de um sistema isolado (somatória dos momentos das partículas que o compõe) não muda no tempo, ou seja, é conservado.

Exemplo:

Suponha que exista um conjunto de partículas com momentos

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots + m_m\vec{v}_m = \vec{A} \qquad (1)$$

então, colisões internas mudam os valores de $\vec{v}_m$, Devando-os em

$$m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' + m_3\vec{v}_3' + \cdots + m_m\vec{v}_m' = \vec{B} \qquad (2)$$

Pelo princípio de conservação, temos que

$$m_1(\vec{v}_1' - \vec{v}_1) + m_2(\vec{v}_2' - \vec{v}_2) + \cdots + m_m(\vec{v}_m' - \vec{v}_m) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' + \cdots + m_n\vec{v}_n'}_{\vec{B}} = \underbrace{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_n\vec{v}_n}_{\vec{A}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \vec{A}$$

Isto significa que a soma dos momentos das partículas de um sistema isolado não muda com o tempo.

Vamos verificar se existe alguma outra quantidade matemática que se mostra constante ao aplicarmos as leis de Newton.

Digamos então que dentro do sitema de partículas, quando uma partícula toca a outra o contato ocorre durante uma distância pequena $d\vec{r}$.

Vamos analisar duas partículas em particular, o contato entre a i-ésima partícula e a j-ésima particula. Quando estas particulas se tocam o toque ocorre durante um pequeno intervalo de tempo dt e por uma pequena distância $d\vec{r}$.

$$\Rightarrow \quad m_i\, d\vec{v}_i + m_j\, d\vec{v}_j = 0 \qquad \text{"Como verificado antes".}$$

dividindo tudo por dt temos

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} + m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} = 0 \qquad \text{"Soma das forças é nula"}$$

Durante o choque as partículas estão em contato, então, durante o contato, o deslocamento espacial das duas é o mesmo, ou seja

$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_j \equiv d\vec{r}$$

Façamos entao o produto escalar em ambos os lados por $d\vec{r}$

Podemos escrever então

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i + m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} \cdot d\vec{r}_j = 0$$

$$\Rightarrow m_i\, d\vec{v}_i \cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}_i}{dt}}_{\vec{v}_i} + m_j\, d\vec{v}_j \cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}_j}{dt}}_{\vec{v}_j} = 0$$

$m_i \vec{v}_i \cdot d\vec{v}_i + m_j \vec{v}_j \cdot d\vec{v}_j = 0$ "Produto escalar"

$$m_i \left(v_{ix}\, dv_{ix} + v_{iy}\, dv_{iy} + v_{iz}\, dv_{iz} \right) + m_j \left(v_{jx}\, dv_{jx} + v_{jy}\, dv_{jy} + v_{jz}\, dv_{jz} \right) = 0$$

integrando tudo temos: { sendo que o índice ixf refere-se à partícula i, componente x, final. ixo é " " " " , inicial.

$$\frac{m_i}{2}\left(v_{ixf}^2 - v_{ixo}^2\right) + \frac{m_i}{2}\left(v_{iyf}^2 - v_{iyo}^2\right) + \frac{m_i}{2}\left(v_{izf}^2 - v_{izo}^2\right) \curvearrowright$$

$$+ \frac{m_j}{2}\left(v_{jxf}^2 - v_{jxo}^2\right) + \frac{m_j}{2}\left(v_{jyf}^2 - v_{jyo}^2\right) + \frac{m}{2}\left(v_{jzf}^2 - v_{jzo}^2\right) = 0$$

ou $\frac{m_i}{2}\underbrace{\left[\Delta v_{ix}^2 + \Delta v_{iy}^2 + \Delta v_{iz}^2\right]}_{\Delta v_i^2} + \frac{m_j}{2}\underbrace{\left[\Delta v_{jx}^2 + \Delta v_{jy}^2 + \Delta v_{jz}^2\right]}_{\Delta v_j^2} = 0$

Portanto: $\frac{m_i \Delta v_i^2}{2} + \frac{m_j \Delta v_j^2}{2} = 0$

Isto significa que a variação da quantidade $m\Delta v^2/2$ de uma partícula pertencente a um sistema isolado só ocorre se esta mesma quantidade for transferida para uma outra partícula também pertencen- ao sistema.

O caso acima pode ser generalizado para um sistema de n partículas ao considerarmos todos os pares de partículas podendo interagir mutuamente.

De forma análoga ao procedimento realizado para o momento linear, concluímos que

$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \cdots\cdots + \frac{m_m v_m^2}{2} = A$ sendo A uma constante.

Aplicação: Joque entre duas partículas isoladas.

$$m_1 \Delta v_1 + m_2 \Delta v_2 = 0$$

$$m_1 (v_{1f} - v_{1i}) = -m_2 (v_{2f} - v_{2i}) \quad \Big\} \text{ momento (1)}$$

$$m_1 \Delta v_1^2 + m_2 \Delta v_2^2 = 0$$

$$m_1 (v_{1f}^2 - v_{1i}^2) = -m_2 (v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$$

$$\Rightarrow m_1 (v_{1f} + v_{1i})(v_{1f} - v_{1i}) = -m_2 (v_{2f} + v_{2i})(v_{2f} - v_{2i}) \quad (2)$$

dividindo $\frac{(2)}{(1)}$

$$\Rightarrow \quad v_{1f} + v_{1i} = v_{2f} + v_{2i}$$

ou $\quad v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$]] analisar. (3)

voltar em $\quad m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$

de (3) $\Rightarrow \quad v_{1f} = v_{2f} + v_{2i} - v_{1i}$

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{2f} + m_1 v_{2i} - m_1 v_{1i} + m_2 v_{2f}$$

$$v_{2f} (m_2 + m_1) = 2 m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1) v_{2i}$$

$$v_{2f} = \frac{2 m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2} + \frac{(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1} v_{2i}$$

trocando índices:

$$v_{1f} = \frac{2 m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} + \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

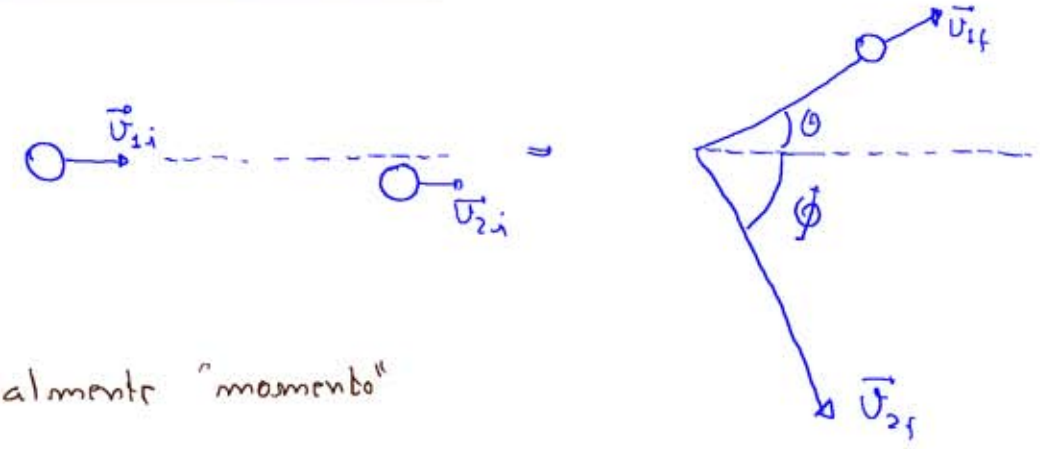
Caso especial:

$m_1 = m_2$ e $v_{2i} = 0$

$v_{1f} = 0$] como esperado?

$v_{2f} = v_{1i}$]

Colisão bi-dimensional



vetorialmente "momento"

$$\Rightarrow m_1(\vec{v}_{1f} - \vec{v}_{1i}) + m_2(\vec{v}_{2f} - \vec{v}_{2i}) = 0$$

$$m_1(v_{1fx} - v_{1ix})\hat{i} + m_1(v_{1fy} - v_{1iy})\hat{j} +$$

$$m_2(v_{2fx} - v_{2ix})\hat{i} + m_2(v_{2fy} - v_{2iy})\hat{j} = 0$$

$$\Rightarrow \quad m_1(v_{1fx} - v_{1ix}) = -m_2(v_{2fx} - v_{2ix}) \qquad (1)$$

$$\text{e} \quad m_1(v_{1fy} - v_{1iy}) = -m_2(v_{2fy} - v_{2iy}) \qquad (2)$$

$\Rightarrow$ Adicionar a relação escalar associada à conservação de energia cinética:

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \qquad (3)$$

3 equações e 4 incógnitas. Uma precisa ser medida!

Exemplo: $v_{2i} = 0$ "partícula 2 inicialmente em repouso".

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 v_{1ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx} \\ 0 = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy} \end{cases}$$

obs:
$v_{1fx} = v_{1f}\cos(\theta)$
$v_{2fx} = v_{2f}\cos(\phi)$

$$\begin{cases} m_1 v_{1ix} = m_1 \underline{v_{1f}}\cos(\underline{\theta}) + m_2 \underline{v_{2f}}\cos(\underline{\phi}) & (1) \\ 0 = m_1 \underline{v_{1f}}\,\mathrm{sen}(\underline{\theta}) - m_2 \underline{v_{2f}}\,\mathrm{sen}(\underline{\phi}) & (2) \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 \underline{v_{1f}}^2 + \frac{1}{2} m_2 \underline{v_{2f}}^2 & (3) \end{cases}$$

As variáveis sublinhadas são (como posto inicialmente) as incógnitas. Como temos três equações e quatro incógnitas, precisamos obter uma através de algum outro mecanismo; uma medida experimental, por exemplo.

Vamos supor então que o ângulo ϕ foi medido. Para as incognitas restantes temos:

"Note que $v_{1ix} = v_{1i}$"

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f}\cos(\theta) + m_2 v_{2f}\cos(\phi) & (1) \\ 0 = m_1 v_{1f}\,\mathrm{sen}(\theta) - m_2 v_{2f}\,\mathrm{sen}(\phi) & (2) \\ m_1 v_{1i}^2 = m_1 v_{1f}^2 + m_2 v_{2f}^2 & (3) \end{cases}$$

Desta forma podemos utilizar algum metodo para solução do sistema acima, a fim de obtermos os valores de v_{1f}, v_{2f} e θ.

Obs:
- Vou utilizar um método um tanto complexo para resolver o sistema acima (entendível)
- Vou fazer iso para que se familiarizem com algumas técnicas para solução de sistemas.

segue:

solução:

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f}\cos(\theta) + m_2 v_{2f}\cos(\phi) & (1) \\ 0 = m_1 v_{1f}\operatorname{sen}(\theta) - m_2 v_{2f}\operatorname{sen}(\phi) & (2) \\ m_1 v_{1i}^2 = m_1 v_{1f}^2 + m_2 v_{2f}^2 & (3) \end{cases}$$

Vamos manipular (1), (2) e (3) para eliminar v_{1f}

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} - m_2 v_{2f}\cos(\phi) = m_1 v_{1f}\cos(\theta) & (1) \\ m_2 v_{2f}\operatorname{sen}(\phi) = m_1 v_{1f}\operatorname{sen}(\theta) & (2) \\ m_1 v_{1i}^2 - m_2 v_{2f}^2 = m_1 v_{1f}^2 & (3) \end{cases}$$

dividindo (2)/(1) temos:

$$\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{m_2 v_{2f}\operatorname{sen}(\phi)}{m_1 v_{1i} - m_2 v_{2f}\cos(\phi)} \qquad (1^*)$$

elevando (2) ao quadrado e dividindo por (3):

$$\frac{\left[m_2 v_{2f}\operatorname{sen}(\phi)\right]^2}{m_1 v_{1i}^2 - m_2 v_{2f}^2} = m_1 \operatorname{sen}^2(\theta)$$

ou

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{m_2 v_{2f}\operatorname{sen}(\phi)}{\left(m_1^2 v_{1i}^2 - m_1 \cdot m_2 v_{2f}^2\right)^{1/2}} \qquad (2^*)$$

de 1ª $\theta = \operatorname{arctag}\left\{ \dfrac{m_2 v_{2f} \operatorname{sen}(\phi)}{m_1 v_{1i} - m_2 v_{2f} \cos(\phi)} \right\}$

de 2ª $\theta = \operatorname{arcsen}\left\{ \dfrac{m_2 v_{2f} \operatorname{sen}(\phi)}{\left(m_1^2 v_{1i}^2 - m_1 \cdot m_2 v_{2f}^2 \right)^{1/2}} \right\}$

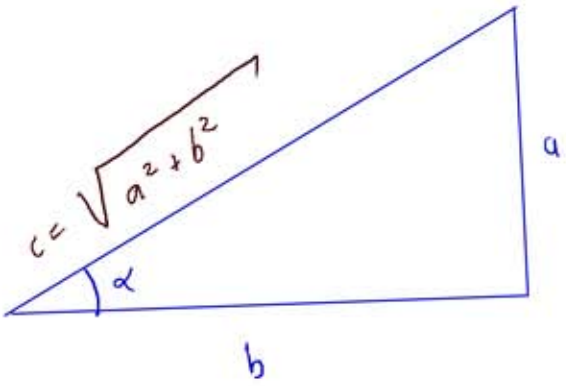
dividindo:

$$\operatorname{arctag}\left\{ \frac{m_2 v_{2f} \operatorname{sen}(\phi)}{m_1 v_{1i} - m_2 v_{2f} \cos(\phi)} \right\} = \operatorname{arcsen}\left\{ \frac{m_2 v_{2f} \operatorname{sen}(\phi)}{\left(m_1^2 v_{1i}^2 - m_1 \cdot m_2 v_{2f}^2 \right)^{1/2}} \right\}$$

tirando tag dos dois lados

$$a \equiv m_2 v_{2f} \operatorname{sen}(\phi) \qquad b \equiv m_1 v_{1i} - m_2 v_{2f} \cos(\phi)$$

$$= \operatorname{tag}\left\{ \underbrace{\operatorname{arcsen}\left\{ \frac{m_2 v_{2f} \operatorname{sen}(\phi)}{\left(m_1^2 v_{1i}^2 - m_1 \cdot m_2 v_{2f}^2 \right)^{1/2}} \right\}}_{\alpha} \right\}$$



se $\operatorname{tag}(\alpha) = \dfrac{a}{b} \Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha) = \dfrac{a}{c} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

portanto

$$\operatorname{sen}\left\{\operatorname{arcsen}\left\{\frac{m_2 v_{2f}\operatorname{sen}(\phi)}{\left(m_1^2 v_{1i}^2 - m_1 m_2 v_{2f}^2\right)^{1/2}}\right\}\right\} = \frac{m_2 v_{2f}\operatorname{sen}(\phi)}{\left[\left(m_2 v_{2f}\operatorname{sen}(\phi)\right)^2 + \left(m_1 v_{1i} - m_2 v_{2f}\cos(\phi)\right)^2\right]^{1/2}}$$

mas $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}[\beta]\right) = \beta$

$$\Rightarrow \frac{m_2 v_{2f}\operatorname{sen}(\phi)}{\left[m_1^2 v_{1i}^2 - m_1 m_2 v_{2f}^2\right]^{1/2}} = \frac{m_2 v_{2f}\operatorname{sen}(\phi)}{\left[\left(m_2 v_{2f}\operatorname{sen}(\phi)\right)^2 + \left(m_1 v_{1i} - m_2 v_{2f}\cos(\phi)\right)^2\right]^{1/2}}$$

igualando os denominadores:

$$\cancel{m_1^2 v_{1i}^2} - m_1 m_2 v_{2f}^2 = m_2^2 v_{2f}^2 \operatorname{sen}^2(\phi) + \cancel{m_1^2 v_{1i}^2} - 2 m_1 m_2 v_{1i} v_{2f}\cos(\phi) + m_2^2 v_{2f}^2 \cos^2(\phi)$$

$$\Rightarrow v_{2f}\left[-m_1 m_2 - m_2^2 \operatorname{sen}^2(\phi) - m_2^2 \cos^2(\phi)\right] + \cancel{v_{2f}}\left[2 m_1 m_2 v_{1i}\cos(\phi)\right] = 0$$

$$v_{2f} = \frac{2 m_1 m_2 v_{1i}\cos(\phi)}{m_1 m_2 + m_2^2\underbrace{\left[\operatorname{sen}^2(\phi) + \cos^2(\phi)\right]}_{1}}$$

$$\boxed{v_{2f} = \frac{2 m_1 v_{1i}\cos(\phi)}{m_1 + m_2}}$$

Analisar:

Observe que este resultado deve coincidir com o caso unidimensional quando $\phi = 0°$

$\Rightarrow$ se $\phi = 0°$

$$v_{2f} = \frac{2 m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2}$$) como esperado.

se $\phi = 90°$

$v_{2f} =$ zero

esperado pois é o limite após o qual m_1 passa reto

obtenção de v_{1f}.

Da equação (3) "conservação de energia" temos

$$\frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2$$

$$\Rightarrow v_{1f}^2 = v_{1i}^2 - \frac{m_2}{m_1} v_{2f}^2$$

$$v_{1f} = \left[v_{1i}^2 - \frac{m_2}{m_1} \frac{4 m_1^2 v_{1i}^2 \cos^2(\phi)}{(m_1 + m_2)^2} \right]^{1/2}$$

$$v_{1f} = v_{1i} \left[1 - \frac{4 m_1 m_2 \cos^2(\phi)}{(m_1 + m_2)^2} \right]^{1/2}$$

ANÁLISE

Obs: Se $m_1 = m_2 = m$ e ϕ = zero v_{1f} deve ser zero.

$$v_{1f} = v_{1i} \cdot \left[1 - \frac{4m^2 \cos(0^\circ)}{(2m)^2} \right]^{1/2} = v_{1i} \left[1 - \frac{4m^2}{4m^2} \right]^{1/2}$$

$$v_{1f} = v_{1i} \cdot \left[1 - 1 \right]^{1/2}$$

$$v_{1f} = \text{zero}$$

ANÁLISE

se $\phi = 90^\circ$

$v_{1f} = v_{1i}$ "pois passa direto"

etc...

Obter θ ⇝

Obtenção de θ

da relação (2)

$$\Rightarrow \quad m_2 v_{2f} \operatorname{sen}(\phi) = m_1 v_{1f} \operatorname{sen}(\theta)$$

Portanto:

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{m_2 \operatorname{sen}(\phi)}{m_1 v_{1f}} v_{2f}$$

$\Rightarrow$ introduzindo v_{2f} e v_{1f}

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{m_2 \operatorname{sen}(\phi)}{m_1} \cdot \frac{2 m_1 v_{1i} \cos(\phi)}{(m_1 + m_2)} \cdot \frac{1}{v_{1i}\left[1 - \frac{4 m_1 m_2 \cos^2(\phi)}{(m_1+m_2)^2}\right]^{1/2}}$$

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{2 m_2 \operatorname{sen}(\phi)\cos(\phi)}{(m_1+m_2)} \cdot \frac{(m_1+m_2)}{\left[(m_1+m_2)^2 - 4 m_1 m_2 \cos^2(\phi)\right]^{1/2}}$$

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{m_2 \operatorname{sen}(2\phi)}{\left[(m_1+m_2)^2 - 4 m_1 m_2 \cos^2(\phi)\right]^{1/2}}$$

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left\{ \frac{m_2 \operatorname{sen}(2\phi)}{\left[(m_1+m_2)^2 - 4 m_1 m_2 \cos^2(\phi)\right]^{1/2}} \right\}$$

Análise para $m_1 = m_2 = m$ e $\phi = 0°$

$$\Rightarrow \theta = \operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{0}{4m^2 - 4m^2}\right] \Rightarrow \theta = \operatorname{sen}^{-1}[\text{indeterminado}]$$

θ = indeterminado. "lógico pois m_1 parou, v_{1f} = zero".

Em breve postarei a abordagem teórica final. Em seguida resolveremos problemas visando a 2° prova.
OBS:

O problema de colisão bidimensional foi resolvido de uma forma particular (escolha minha). Vocês podem resolver o sistema de equações da forma que acharem melhor. Sugiro que aprendam a resolver de alguma forma, pois este tipo de sistema aparecerá muitas vezes em cursos futuros.

Esdudar:

- Energia e trabalho
- Conservação de energia
- Conservação de momento
- Colisões em uma e duas dimensões (Note que colisões em duas dimensões contém tudo o que se precisa para resolver problemas em uma dimensão, (só fazer $\phi = 0^\circ$)
- Também estudar dinamica com atrito. (resolver problemas semelhantes aos abordados em sala).