

Propriedades Magnéticas

★ A interação magnética - Breve revisão dos conceitos básicos.

De onde vem o magnetismo?

Dado um referencial de observação - o laboratório, por exemplo. Observa-se dois tipos de interação associados às cargas elétricas.

1) Interação entre cargas do tipo $\vec{F}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}_{2,1}$

onde q_i = carga elétrica da carga i ($i=1$ ou 2), $\vec{r}_{2,1}$ o vetor distância da carga ② $\xrightarrow{\vec{r}}$ ① e $r = |\vec{r}_{2,1}|$.

Trata-se da interação Coulombiana e ocorre entre quaisquer portadores de carga elétrica líquida.

Vale frisar que as partículas interatômicas portadoras de carga elétrica são os prótons com carga positiva (por definição) $q_{\text{prot}} = +1,6 \times 10^{-19}$ Coulomb e os elétrons com carga negativa $q_{\text{elêtron}} = -1,6 \times 10^{-19}$ Coulomb.

A unidade Coulomb é definida em homenagem ao pesquisador Charles Augustin de Coulomb. O Coulomb não é definido como proporcionalidade ou como relação entre outras grandezas físicas. Desta forma, não se faz necessário expressá-la em termos de outros parâmetros físicos tais como, por exemplo, se faz com

trabalho $W = F \cdot d$, $W = \text{Joule}$ e $[J] = [N \cdot m]$

Corrente $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$, Ampère $\Rightarrow [A] = \left[\frac{\text{Coul.}}{\text{seg}} \right]$

$\Rightarrow$ A carga elétrica é uma intensidade intrínseca dos prótons e elétrons e, em princípio, poderíamos associar qualquer valor numérico à carga de um elétron, tal que a constante de proporcionalidade entre carga e força

$$F = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

Na equação acima pode-se atribuir quaisquer valores para as cargas. Mede-se a força entre elas e ajusta-se o k para que a igualdade seja satisfeita.

Resumindo, Um Coulomb é apenas um Coulomb. Como $[F] = \text{Newton}$ e $[r] = \text{metro}$

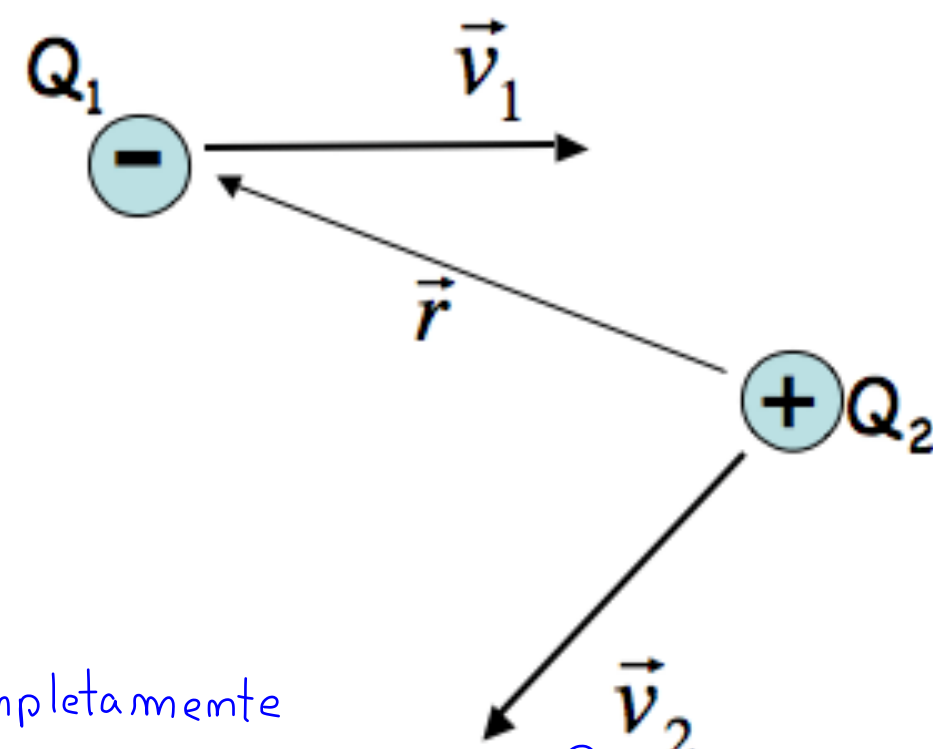
$\Rightarrow [k] = \frac{N \cdot m^2}{C^2}$ e fica tudo certo.

A constante $[k]$ paga o preço das definições independentes (isso no SI).

2) Interação entre cargas em movimento.

Cargas elétricas apresentam (relativamente a um referencial inercial - laboratório) uma interação com características diferenciadas relativamente à interação Coulombiana, brevemente descrita acima. Uma interação entre cargas que depende do movimento de ambas as cargas relativamente ao referencial de observação.

⇒ Considere duas cargas q_1 e q_2 com velocidades v_1 e v_2 , relativamente ao laboratório.

$$\vec{F}_{\text{(em 2 devido 1)}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \cdot \vec{v}_2 \times (\vec{v}_1 \times \hat{r}_{12}) \quad (*)_1$$


Neste ponto é de maior importância entender-se completamente a equação acima. Sua forma final é resultado de observações experimentais. Perceba que só existe força magnética entre cargas em movimento com relação ao laboratório - $F=0$ se v_1 ou $v_2=0$. Adicionalmente a intensidade e o sentido de $\vec{F}$ depende das intensidades e sentidos de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, bem como das cargas. Trata-se de uma interação diferente da Coulombiana a qual só depende das cargas e distância entre as cargas.

Após esta breve introdução vamos considerar que o leitor possui certa familiaridade com algumas das principais consequências da relação $(*)_1$ acima. Por exemplo, do ponto de vista da carga q_2 ela sente uma força e pode atribuir esta força ao campo de ação de alguma outra carga em movimento. Definindo-se este campo de ação como $\vec{B}$

$$\Rightarrow \vec{F}_2 = q_2 \cdot \vec{v}_2 \times \vec{B} \quad (*)_2$$

⇒ Comparando $(*)_2$ com $(*)_1$ conclui-se que

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \cdot q_1 \cdot \vec{v}_1 \times \hat{r} \quad (*)_3$$

Em geral se escreve $\vec{F}_M = q \vec{v} \times \vec{B}$ como sendo a força magnética sobre uma carga q devido ao campo magnético $\vec{B}$ (ou equivalentemente, ao movimento de outras cargas na "vizinhança").

A relação $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \cdot q \vec{v} \times \hat{r}$ "permite" calcular-se o campo originado por cargas em movimento.

Exemplo: Calcule o campo a uma distância r de um fio retilíneo muito longo.

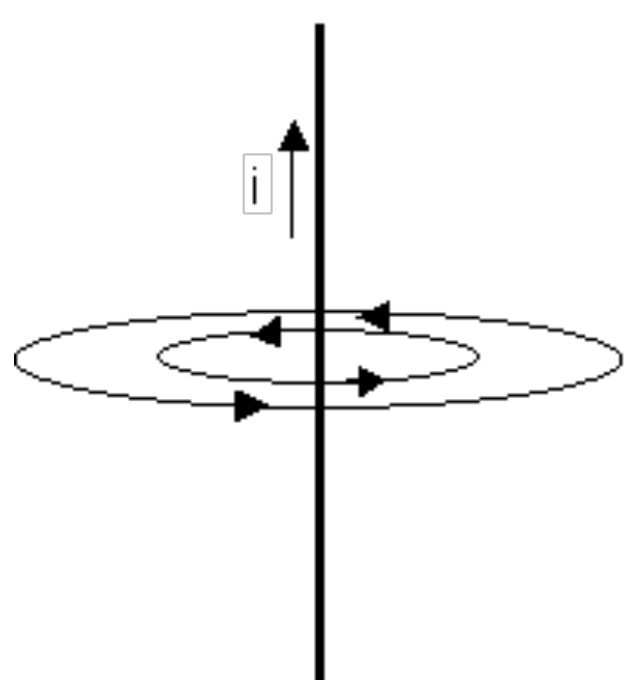


Figura em perspectiva

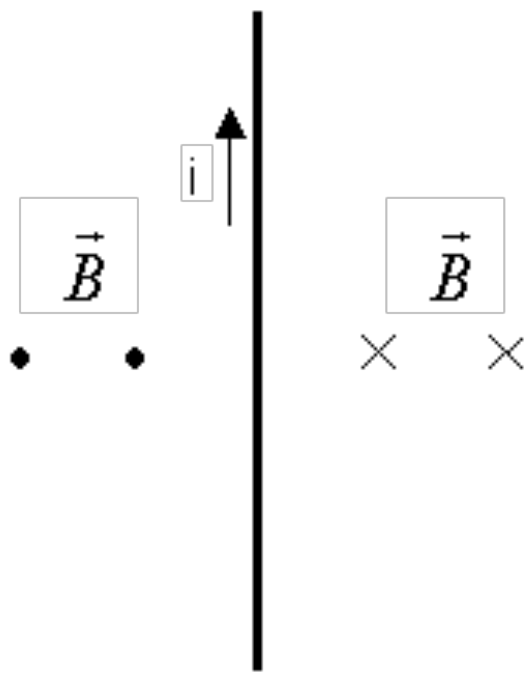
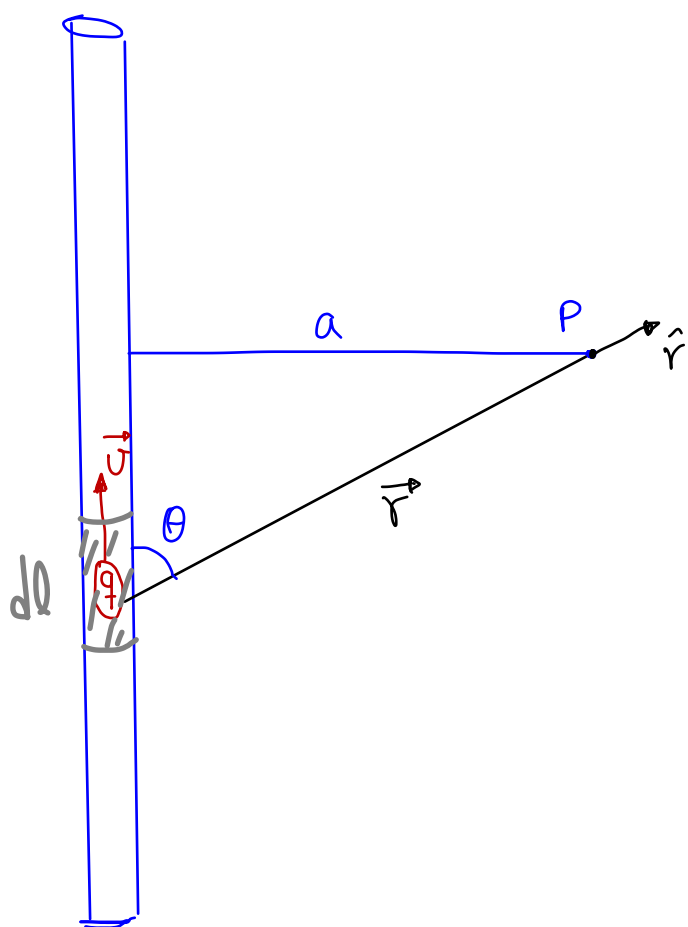


Figura no plano

Solução:



Cada carga passando na região rachurada produz um campo no ponto P dado por

$$\vec{B}_q = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} q \vec{v} \times \hat{r}$$

Mas em um fio não passa uma única carga mas um certa quantidade N dentro da região rachurada. Adicionalmente a região rachurada é apenas a contribuição de um pequeno trecho dl do fio.

Para este trecho dl vamos computar o campo de todas as cargas em seu interior como $d\vec{B}$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \cdot \left(\sum_i q_i \cdot \vec{v}_i \times \hat{r} \right)$$

$$\text{mas } v_i = \frac{dl}{\tau}$$

"velocidade é a distância dl dividida pelo tempo τ para percorrê-la"

$\Rightarrow$ Assumido $d\vec{l}$ no mesmo sentido que $\vec{v}_i \propto$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \cdot \left(\sum_i q_i \frac{d\vec{l}}{\tau} \times \hat{r} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \cdot \left(\frac{\sum_i q_i}{\tau} \right) \cdot d\vec{l} \times \hat{r}$$

Mas $\sum_i q_i$ = Carga total dentro de dl e τ = tempo para essa carga ultrapassar dl.



Portanto $\frac{\sum_i q_i}{\Delta t} = i$, sendo i a corrente elétrica (Quantos Coulombs passam por segundo através de uma seção transversal do fio).

$$\Rightarrow \vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \cdot i \, d\vec{l} \times \hat{r}$$

Finalmente o campo total é resultado da contribuição de todos os $d\vec{l}$ através do fio.

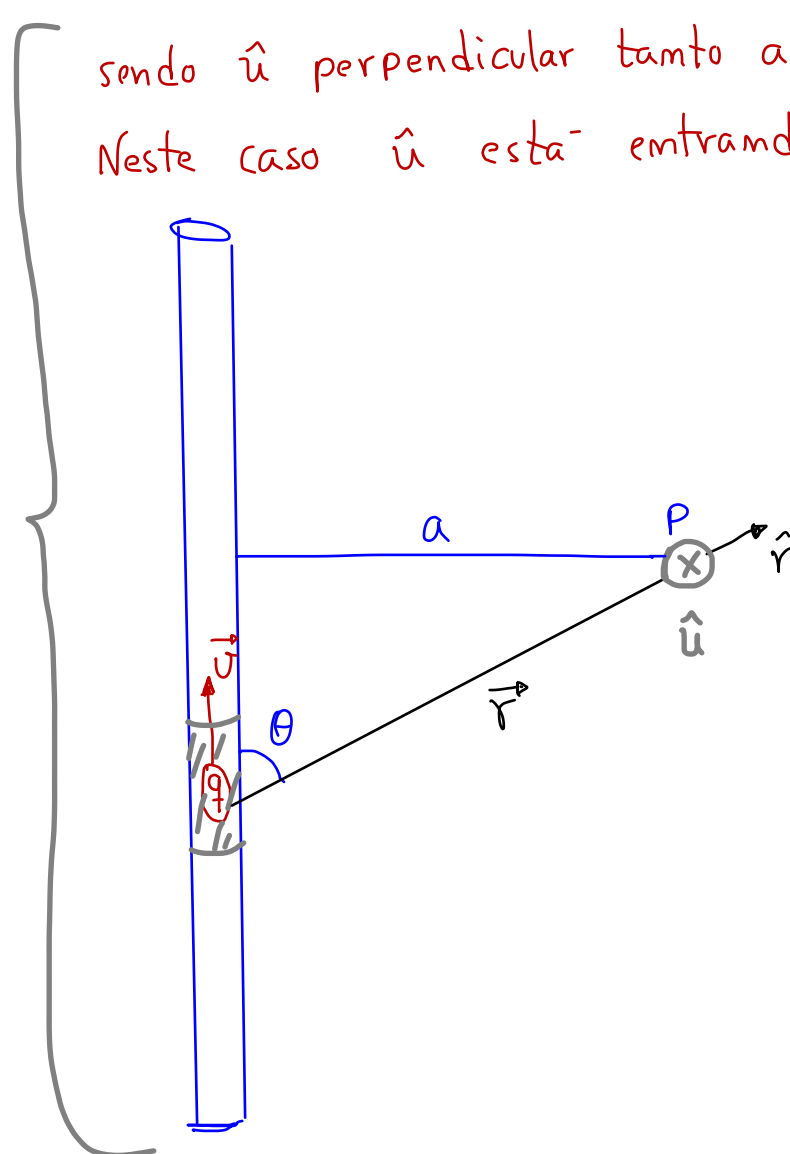
note que $d\vec{l} \times \hat{r} = dl \cdot \sin(\theta) \hat{u}$

também:

$$\sin(\theta) = \frac{a}{r}$$

$$r = \frac{a}{\sin(\theta)}$$

sendo $\hat{u}$ perpendicular tanto a $d\vec{l}$ quanto a $\hat{r}$.
Neste caso $\hat{u}$ está entrando na página.

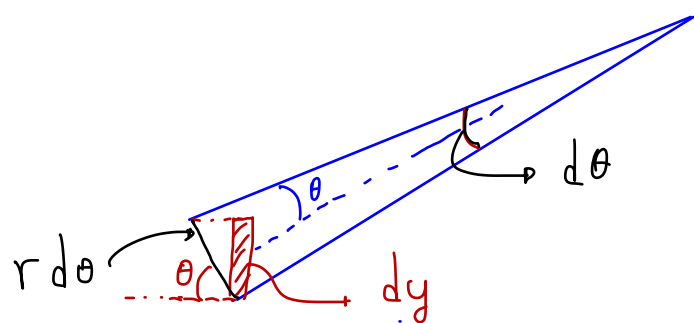


$$\Rightarrow \vec{dB} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{1}{\frac{a^2}{\sin^2(\theta)}} \cdot dl \sin(\theta) \hat{u} = \frac{\mu_0 i}{4\pi a^2} \cdot \sin^2(\theta) \cdot \sin(\theta) dl \hat{u}$$

O campo total é $\vec{B} = \int_{\text{todo fio}} d\vec{B} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 i}{4\pi a^2} \cdot \sin^2(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot dy \hat{u}$ fizemos $dl = dy$

Aqui usamos os limites de integração $-\infty \rightarrow \infty$ porque consideramos um fio muito longo.

Para cada ponto y temos um θ diferente.



$$\Rightarrow \begin{aligned} dy \cos(90^\circ - \theta) &= r d\theta \\ \text{ou } dy \sin(\theta) &= r d\theta \\ dy &= \frac{r d\theta}{\sin(\theta)} \end{aligned}$$

(como $r = a/\sin(\theta)$)

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi a^2} \int \frac{\cancel{\sin^2(\theta)} \cdot \sin(\theta) \cdot a}{\cancel{\sin^2(\theta)}} \cdot d\theta \hat{u} = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \hat{u}$$

$\left. \begin{array}{ll} y \text{ em } -\infty & \theta \rightarrow 0 \\ y \text{ em } \infty & \theta \rightarrow \pi \end{array} \right\}$ veja a figura.

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \left[-\cos(\theta) \right]_0^\pi = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \left[-\cos(\pi) - (-\cos(0)) \right]$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} [1 + 1]$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \hat{u}$$

— || —

De forma semelhante, e bem mais simples, pode-se calcular o campo no centro de uma espira de corrente

Como todos os dl's estão a uma mesma distância do centro //

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} d\vec{l} \times \hat{r}$$

$$r = \text{cte}$$

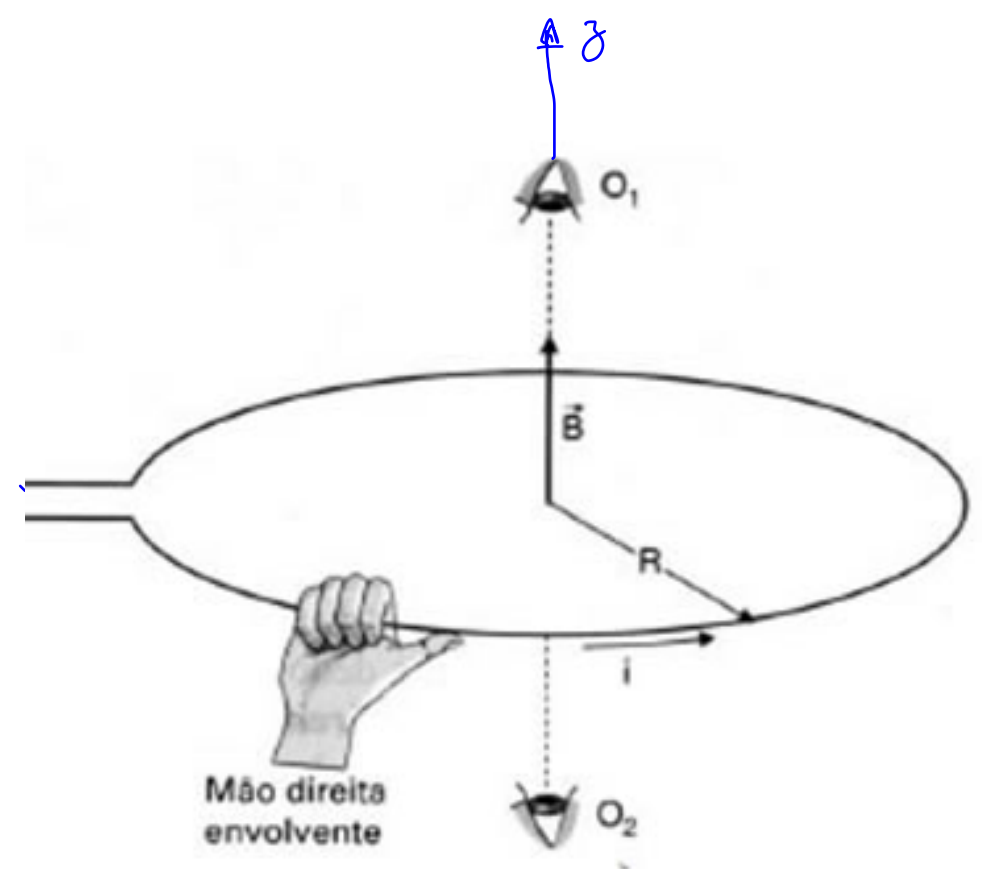
$$\text{e } d\vec{l} \times \hat{r} = dl \cdot 1 \cdot \sin(90^\circ) \hat{R}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \oint dl \hat{R} \quad \text{Mas } \oint dl = 2\pi r$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \cdot 2\pi r \hat{R} = \frac{\mu_0 i}{2r} \hat{R}$$

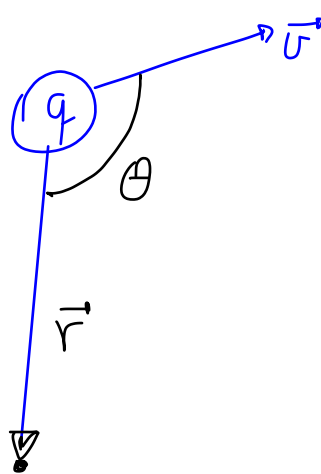
Obs: O detalhe que associa este cálculo ao magnetismo dos materiais é que a origem do magnetismo nos materiais está nos movimentos orbital e de spin dos elétrons.

O movimento orbital produz um efeito espira (como acima) tal que um elétron orbitando um núcleo produz um campo magnético. Quando este campo não é neutralizado por outros elétrons do mesmo átomo orbitando em sentido contrário, então temos um átomo magnético (Como um pequeno ímã permanente.)



Vimos que $\vec{B}$ é definido como força por unidade de carga e por unidade de velocidade perpendicular:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \cdot q \vec{v} \times \hat{r}$$



Uma carga com velocidade $\vec{v}$ sob a influência de $\vec{B}$ sofre uma força

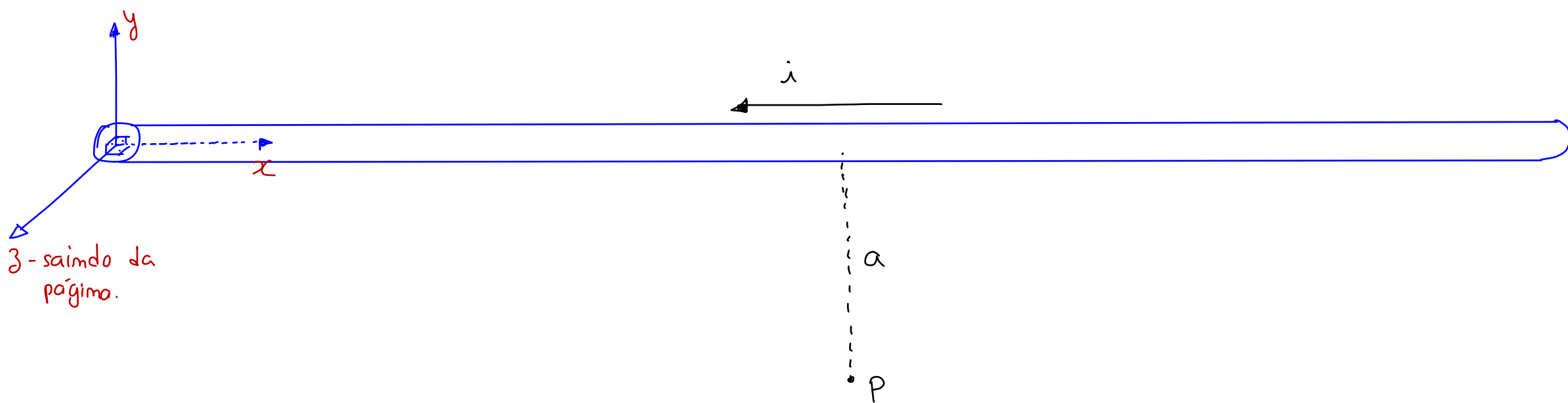
$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad \rightarrow \text{Para } q=1C \text{ e } \vec{v} = \frac{1m}{s} \hat{u} \text{ sendo } \hat{u} \text{ perpendicular a } \vec{v}_i \text{ e } \vec{r}$$

$$\Rightarrow |\vec{F}| = B.$$

Aqui B é definido após a definição das cargas, tal que uma constante de proporcionalidade de μ_0 se faz necessária para acoplar as unidades e a intensidade da força medida em um experimento.

Por outro lado, sabe-se que uma corrente produz um efeito no espaço (o campo). Define-se alternativamente um campo — denotado intensidade magnética $\vec{H}$ — como sendo o resultado direto da corrente que o produz — sem a necessidade de uma constante de acoplamento.

Exemplo: Consideremos um fio retilíneo longo. Vamos redefinir campo como função exclusivamente das grandezas intrínsecas que o produzem.



Antes havíamos definido o campo (fluxo magnético) $\vec{B}$ a partir das cargas em movimento pelo fio.

Obtivemos

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \hat{k}$$

Agora vamos dizer que

$$\vec{H} = \frac{i}{2\pi a} \hat{r} \quad ; \quad \text{e chamar } \vec{H} \text{ de intensidade magnética.}$$

Note que aqui usa-se apenas a corrente e a distância para definir-se campo de forma direta. Assim $[H] = \frac{\text{Ampère}}{\text{metro}}$. E não tem a ver com força.

Contudo, $\vec{B}$ e $\vec{H}$ estão ligados por

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

$$\text{Neste caso } \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \hat{r}.$$

—“—

Chama-se, comumente $H \longrightarrow$ Campo magnético

$B \longrightarrow$ Indução Magnética ou densidade de fluxo magnético.

Nota: Estas duas definições ligeiramente diferentes para algo que nos parece a mesma “coisa” costuma criar confusão nos estudantes e até mesmo em professores e pesquisadores. De fato representam um conceito físico similar (mesma física) porém, devido às suas definições baseadas em parâmetros diferentes, possuem unidades diferentes.

$$\text{Enquanto } [B] = \text{Tesla} = \frac{N}{A \cdot m}$$

$$\text{Lembre: } [B] = \frac{\text{Força}}{\text{Carga} \times \text{velocidade}} = \frac{N}{\text{Coul.} \times \frac{m}{s}} = \frac{N}{\frac{C}{s} \cdot m} = \frac{N}{A \cdot m}$$

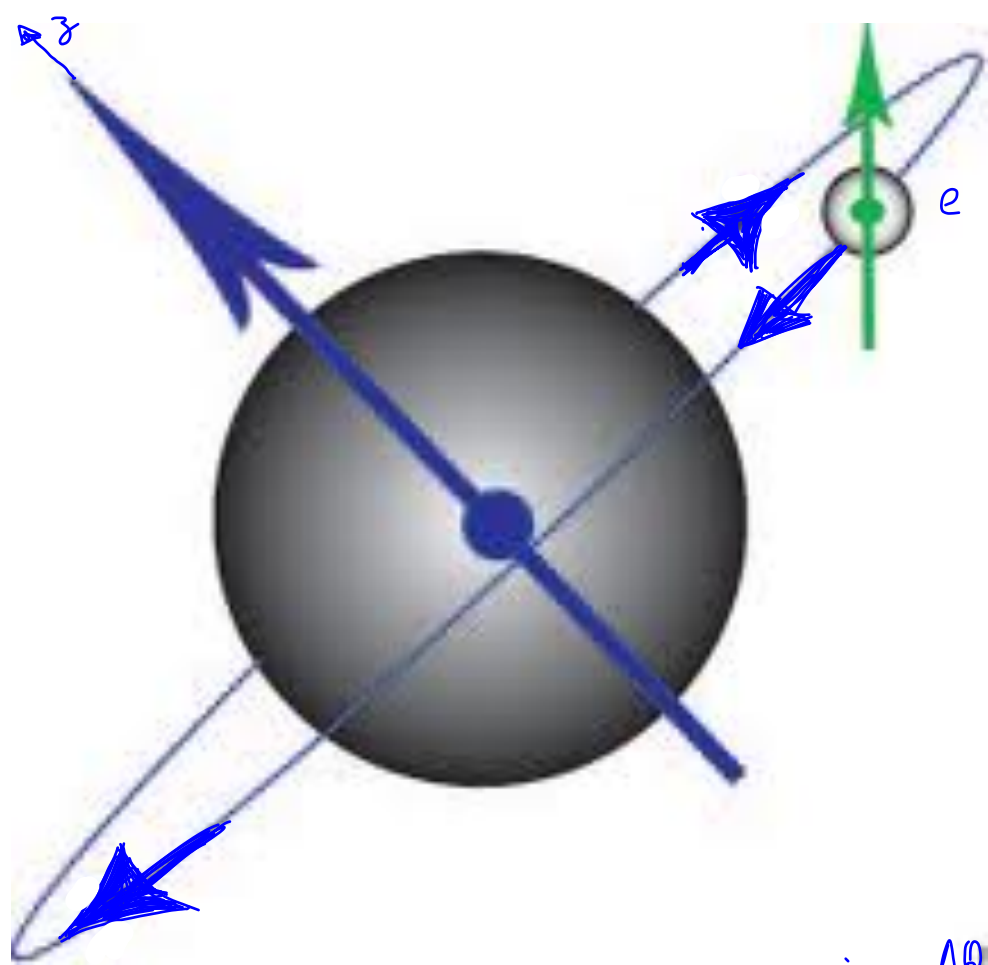
$$[H] = \frac{A}{m}$$

Ou seja, pode-se trabalhar com $\vec{H}$ ou $\vec{B}$ pois se equivalem a menos de uma constante (μ_0 SI). Porém deve-se ter cuidado quando relacioná-los com outras grandezas físicas (Força, corrente, etc.), restando-se atenção nas unidades de medida.

Magnetização

Cada átomo em um sólido pode comporta-se como uma espira de corrente, produzindo um campo magnético.

Exemplo:



Cálculo do campo produzido por um elétron orbitando um núcleo, em uma trajetória circular de raio r .

⇒ trata-se de uma espira circular

⇒ $\vec{H}_{\text{átomo}} = \frac{i}{2r} \hat{k}$ (1) "Como a carga do elétron é negativa, a corrente é inversa ao seu movimento."

Cálculo de i

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{e}{T}, \quad T = \text{período}$$

$T = ?$

$$v = \frac{\Delta s}{T} \Rightarrow v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v}$$

$$\Rightarrow i = \frac{e \cdot v}{2\pi r} \quad (2)$$

Para uma órbita estável $\Rightarrow F_c = \frac{m_e v^2}{r}$ sendo F_c a força de atração pelo núcleo

(assim como terra ao redor do sol).

Para um núcleo com carga líquida $q \rightarrow F_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot e}{r^2}$ "em módulo"

$$\Rightarrow \frac{m_e v^2}{\cancel{r}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q e}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{q e}{4\pi\epsilon_0 m_e r}}$$

em (2)

$$i = \frac{e}{2\pi r} \sqrt{\frac{q \cdot e}{4\pi\epsilon_0 m_e r}} = \sqrt{\frac{q \cdot e^2}{16\pi^3 \epsilon_0 m_e r^3}} \quad \text{em (1)}$$

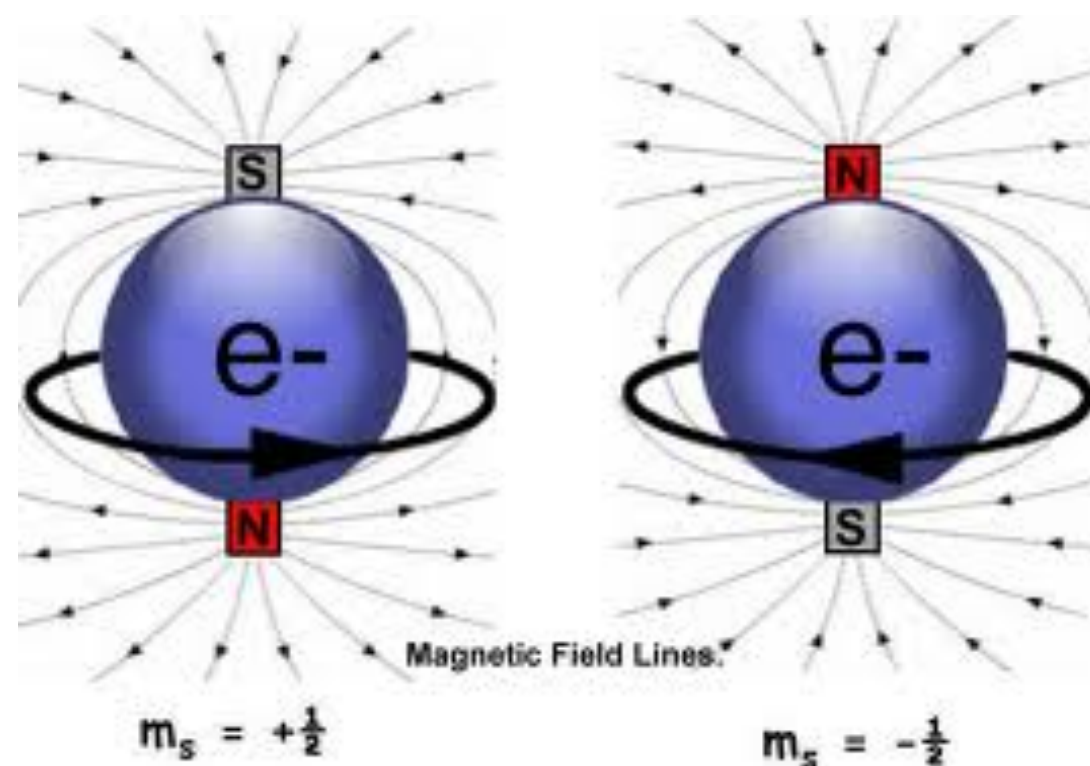
$$\vec{H} = - \frac{1}{2r} \sqrt{\frac{q e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 m_e r^3}} \hat{k} \quad \vec{H} = - \sqrt{\frac{q \cdot e^2}{64 \cdot \pi^2 \cdot \epsilon_0 \cdot m_e \cdot r^5}} \hat{k}$$

Assim, cada átomo produz um campo $\vec{H}$.

Nota: O campo total $\vec{H}$ de um átomo possui outras contribuições como:

★ Contribuição de Spin

Elétrons possuem um campo H_s intrínseco como se mantivessem sempre o mesmo giro em volta de si mesmo (como um pião).



★ Contribuição nuclear

Assim como os elétrons, os prótons e nêutrons no núcleo não são estáticos. Possuem movimentos orbitais e de spin. Contudo sua contribuição para o átomo é muito menor que a dos elétrons e só são levadas em conta em casos de grande precisão nas medidas experimentais.

— — —

O momento magnético e a magnetização. (definições).

Magnetização: Vamos considerar $\vec{H}_{\text{átomo}}$ como sendo o campo total (considerando todas as contribuições) produzido por um átomo.

Magnetização $\vec{M}$ é definida como $\vec{H}_{\text{atômico}}$ em uma unidade de volume. Assim, para o caso particular de todos os átomos magneticamente alinhados, temos

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{H}_i, \text{ sendo } n \text{ o número de átomo por unidade de volume e } \vec{H}_i \text{ o campo produzido por um átomo.}$$

Momento Magnético $\vec{\mu}$ de um átomo.

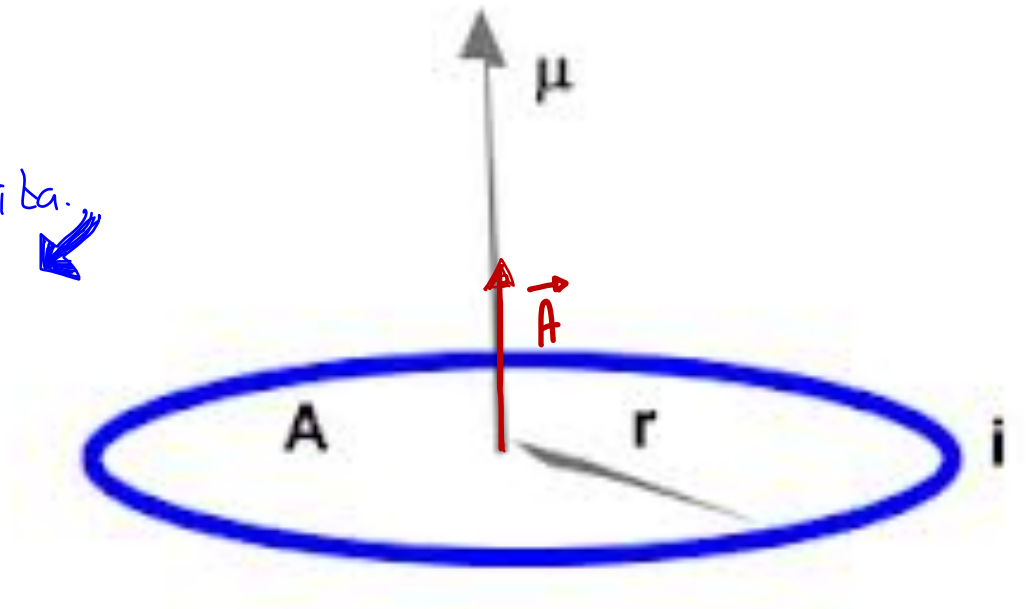


Momento Magnético $\vec{\mu}$ de um átomo.

Não é comum calcular-se a magnetização em função de $\vec{H}_{\text{átomos}}$ como feito na página anterior. Define-se momento magnético de uma espira (não necessariamente circular) como

$$\vec{\mu} = i \cdot \vec{A}$$

sendo o sentido de $\vec{\mu}$ definido pela regra da mão direita.



"Em princípio $\vec{\mu}$ não parece ter relação com $\vec{H}_{\text{átomo}}$

$$\Rightarrow \vec{H}_{\text{orbital}} = \frac{i}{2r} \hat{A} \quad (1)$$

$\Rightarrow \vec{\mu} = i \cdot \vec{A} \quad (2)$; realmente possuem dimensões diferentes. Contudo a magnetização em termos de $\vec{\mu}$ é definida pela divisão da quantidade de $\vec{\mu}$ em um volume V pelo volume V .

$$\vec{M}_{\vec{\mu}} = \frac{1}{V} \cdot \sum_i \vec{\mu}_i \quad (3) \quad \text{"Para um volume dentro do qual todos os } \vec{\mu}_i \text{ estão alinhados no mesmo sentido."}$$

$$\text{e } \vec{M}_{\vec{H}} = \sum_{i=1}^n \vec{H}_i \quad (4)$$

$\Rightarrow (3)$ e (4) possuem a mesma dimensão A/m . "Verifique".

Em princípio, poderíamos trabalhar com qualquer uma das duas definições de magnetização. Historicamente, percebeu-se vantagens técnicas em se trabalhar com

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{\mu}_i \quad (5)$$

★ Por exemplo, uma vantagem em utilizar $\vec{\mu}$ em vez de $\vec{H}_{\text{átomo}}$ aparece quando se calcula o torque que um campo produz sobre um átomo (ou uma espira de corrente), como segue:

Vamos calcular o torque em uma espira retangular, por facilidade.

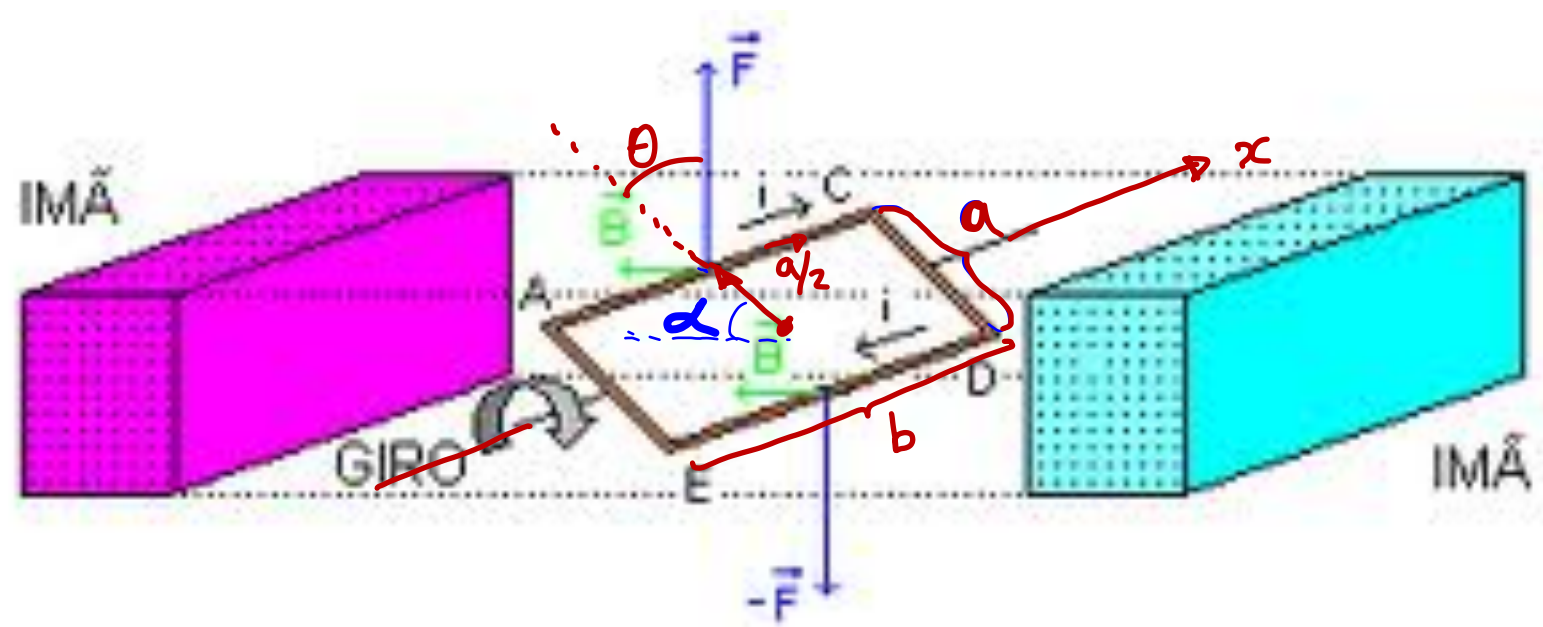


Fig.14

Os torques em $\overline{EA}$ e $\overline{CD}$ se cancelam, sobrando os torques (torque = Força de giro) em $\overline{AC}$ e $\overline{DE}$

$$\vec{T}_{AC} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{a}{2} \cdot F \cdot \sin(\theta) \hat{x}$$

$$F = i B b$$

$$\vec{T}_{AC} = \frac{a \cdot b \cdot i B \sin(\theta)}{2} \hat{x}$$

$$\vec{T}_{DE} = \frac{a b i B \sin(\theta)}{2} \hat{x}$$

$$\vec{T} = \vec{T}_{AC} + \vec{T}_{DE}$$

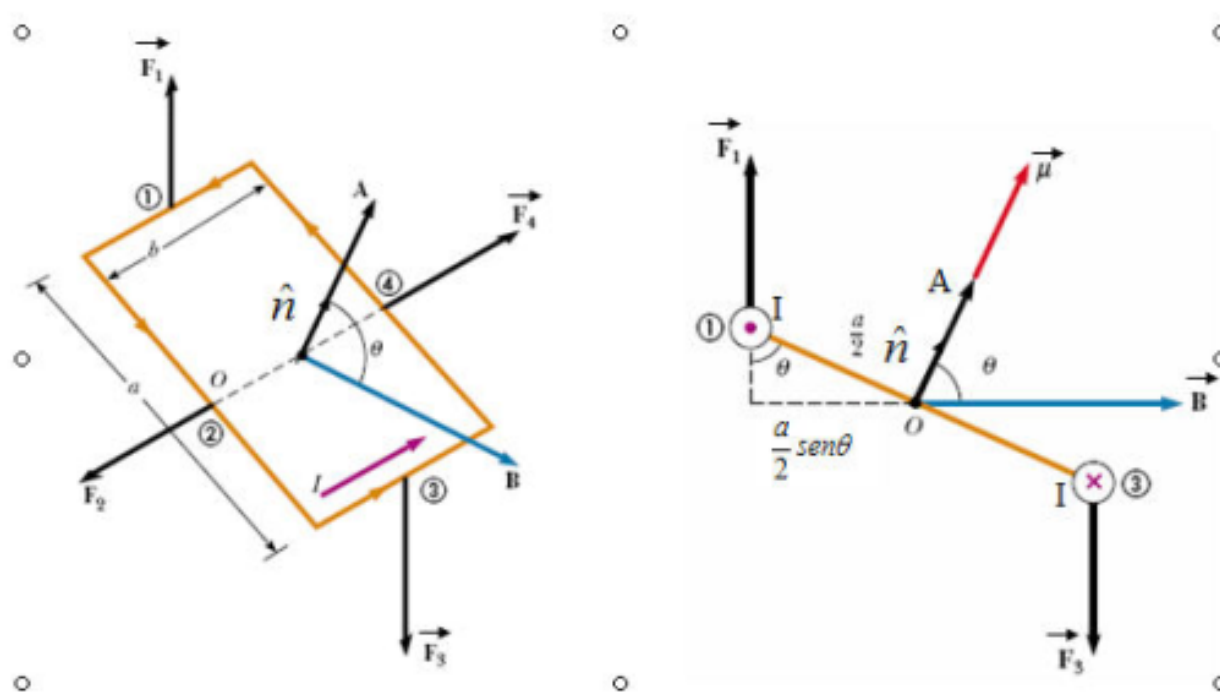
$$\vec{T} = a b i B \sin(\theta) \hat{x}$$

Mas $ab = \text{Área da seção retangular}$

$$\Rightarrow \vec{T} = A \cdot i \cdot B \sin(\theta) \hat{x}$$

$$\text{fazendo } \vec{\mu} = i \vec{A}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{T} = \vec{\mu} \times \vec{B}}$$



obs: Pode-se mostrar que esta expressão é válida para qualquer forma de espira, tal que

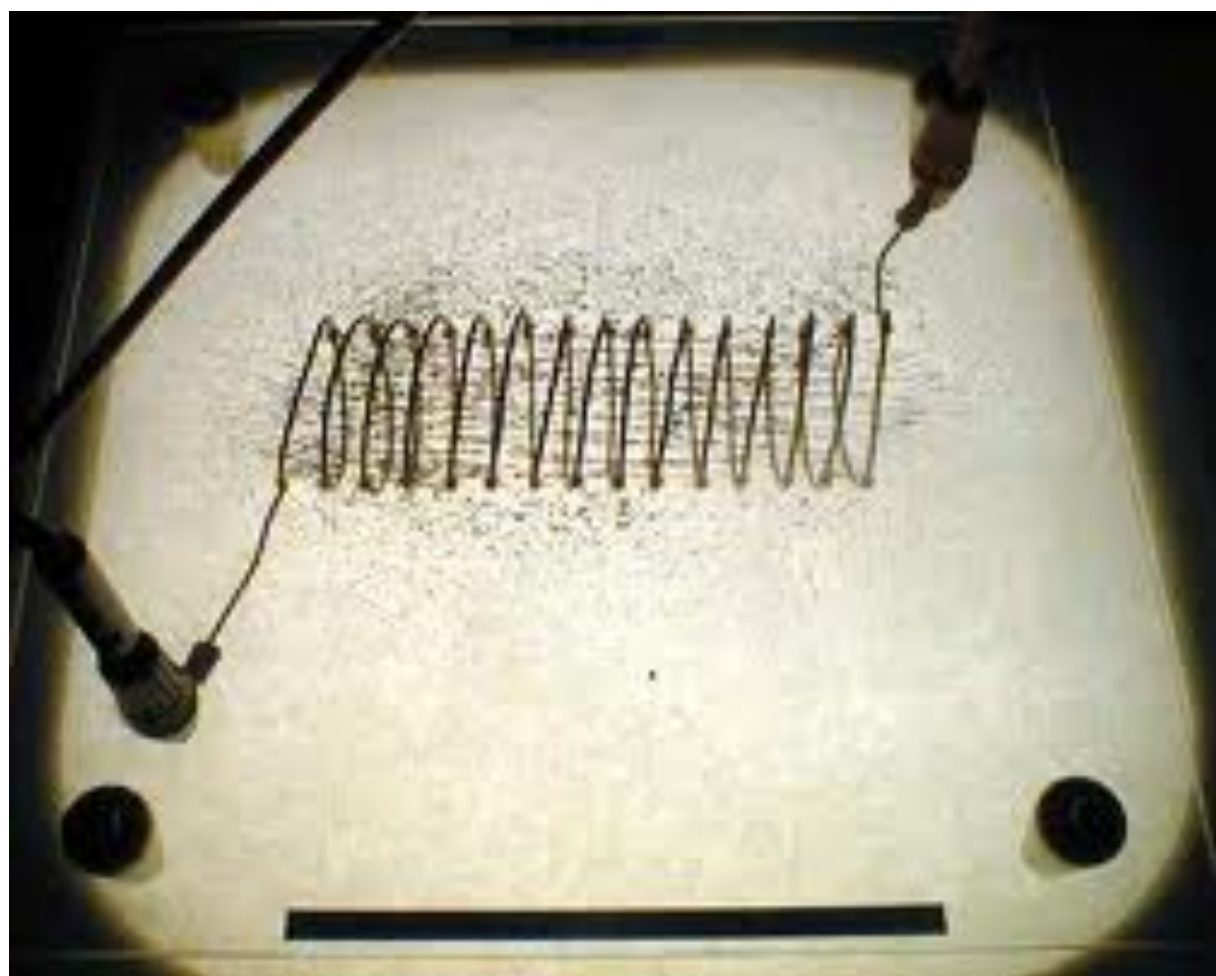
$\vec{\mu} = i \vec{A}$ sendo $|\vec{A}|$ a área delimitada pela espira.

Para um elétron orbitando em um raio r , portanto, $\vec{\mu} = i \cdot \pi r^2 \hat{n}$, sendo $\hat{n}$ um vetor unitário perpendicular ao plano da órbita descrita pelo elétron.

Procedimentos experimentais:

Experimentos visando obter-se informações magnéticas de um material sólido são realizados através da aplicação de um campo externo sobre um sólido e verificando-se como o sólido responde ao campo externo.

Os campos externos são, em geral, estabelecido de forma controlada através de fios com corrente controlada



O campo externo é comumente o $\vec{H}$, visto que é produzido por correntes em espiras.

Este campo $\vec{H}$ quando atua sobre um sólido interage com os momentos magnéticos $\vec{\mu}$ dos átomos que o compõem promovendo tendência de alinhamento devido ao torque.

Após a criação do campo, em um ponto dentro da amostra passa-se a ter a soma de duas intensidades de campo:

↳ a do $\vec{H}$ externo aplicado e dos $\vec{\mu}$ atômicos alinhados.

⇒ Portanto, em um ponto interno ao material temos um campo resultante da soma

$$\vec{H} + \vec{M}, \quad \text{sendo } \vec{M} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{\mu}_i, \quad \text{a contribuição do material, sua magnetização.}$$

No sistema internacional de unidades opta-se por denotar o campo efetivo resultante por $\vec{B}$.

Porém, como vimos, para que $\vec{B}$ tenha mesma dimensão de $\vec{H}$ e $\vec{M}$ é necessário "retirar" sua constante μ_0 .

$$\vec{H}_{\text{efetivo}} = \vec{H}_{\text{ext.}} + \vec{M}$$

$$\vec{H}_{\text{efetivo}} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H} + \vec{M} \quad , \text{ no SI.}$$

Obs: Como $\vec{B}$ é o resultante $\Rightarrow$ é também chamado de indução magnética.

Permeabilidade em um meio qualquer.

Quando aplica-se um campo em um material magnético, este tende a alinhar seus momentos magnéticos tal que, como vimos,

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (1), \text{ mas } \vec{M} \text{ cresce com } \vec{H}, \text{ afinal é } \vec{H} \text{ que provoca o alinhamento.}$$

$\Rightarrow$ Dentre de pequenas variações de $\vec{H}$, tal que $\vec{M}$ aumenta linearmente com $\vec{H}$, pode-se escrever

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}. \quad (2)$$

A constante de proporcionalidade é denotada susceptibilidade magnética χ_m .

Nota: χ_m é uma característica do material, pois cada material responde de forma diferente ao campo externo.

$\Rightarrow$ (2) em (1)

$$\vec{B} = \mu_0 [\vec{H} + \chi_m \vec{H}]$$

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$$

Define-se $\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$ como a permeabilidade magnética do meio onde $\vec{H}$ é aplicado.

Notar que no vácuo (ausência de matéria) $\Rightarrow \chi_m = 0$ e $\mu = \mu_0$ = permeabilidade do vácuo.

Adicionalmente, se $\chi_m = \text{zero}$

$\Rightarrow \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H}$, ou seja, $\vec{B}$ e $\vec{H}$ só diferem pela constante que separa suas definições.

★ Uma característica comum para classificar materiais é a comparação de sua permeabilidade com a do vácuo. Assim define-se permeabilidade relativa por

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}.$$