Aula 07/06/2010

O que temos até este momento?

Verificou-se, experimentalmente, que:

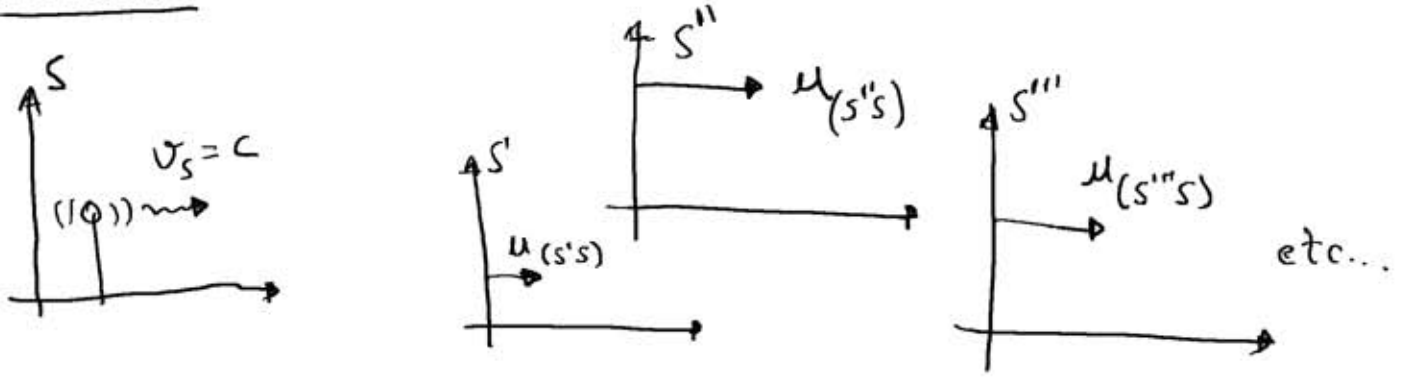
1) Se $\rightsquigarrow$ = um pulso luminoso $[\rightsquigarrow = \text{fóton}]$

$\Rightarrow$ esse fóton viaja com velocidade $c \cong 3\times10^8$ m/s.

2) Dado um pulso luminoso [fóton] de uma fonte em repouso relativamente a um sistema referencial inercial $\underline{S}$.

$\Rightarrow$ A velocidade deste mesmo fóton continua sendo 3×10^8 m/s se medida de qualquer outro referencial inercial $\underline{S'}$ com velocidade $u \neq 0$ relativamente a $\underline{S}$.

Ilustrando:



sendo $u_{(S^m S)}$ = velocidade do sistema S^m, relativamente à S.

Se v_{S^m} = velocidade do fóton com relação ao referencial S^m, temos que $v_S = v_{S'} = v_{S''} = \cdots = v_{S^m} = c$

sendo $c = 3\times10^8$ m/s.

Deste único detalhe experimental resulta a busca de um formalismo que desencadeia a reformulação de toda a mecânica newtoniana, resultando em um novo formalismo chamado de "mecânica relativística".

Resultados imediatos:

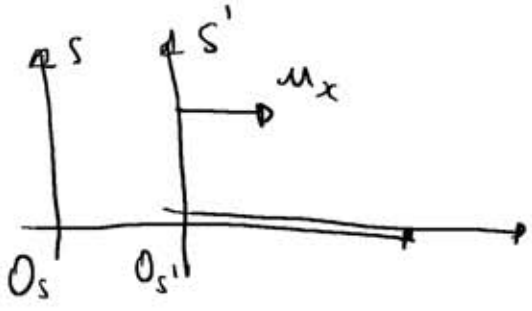
Como $c = \frac{\Delta s^m}{\Delta t^m}$, e os diferentes sistemas estão em movimento relativo, $\Rightarrow$ a única forma de $\underline{c}$ ter o mesmo valor em qualquer S^m é tornando as grandezas ΔS^m e Δt^m dependentes do sistema inercial.

$\Rightarrow$ Obtivemos assim, as transformações de Lorentz que visam tornar $\underline{c}$ uma grandeza absoluta na natureza, e não $\underline{\Delta t}$ e $\underline{\Delta S}$ como consideramos na mecânica newtoniana.

A saber, dados dois sistemas, $\underline{S}$ e $\underline{S'}$, com velocidade relativa $\vec{u} = \pm u_x \hat{i}$

⊕ $\rightarrow$ S' relativo a S

⊖ $\rightarrow$ S " " S'



$\Rightarrow$ Se um evento ocorre em algum ponto $P(x', y', z')$, em um momento t' após a superposição das origens O_S e $O_{S'}$, temos que

- $x = \gamma \cdot (x' + u t')$
- $y = y'$
- $z = z'$
- $t = \gamma \left(t' + \frac{u \cdot x'}{c^2} \right)$

O que "dizem" as equações acima?

Obs: Só saberá utilizar corretamente as transformações de Lorentz, os que conseguirem responder corretamente a pergunta acima.
"(decorar não resolve este problema)".

Resposta:

Vislumbre que um evento não pertence a um dos sistemas. Um evento acontece (Ex: pulso de luz, piscar de olho, último suspiro de um moribundo ... etc.) e todos o observam independente do sistema. A diferença é que; se em S' o evento ocorre em uma posição $P(x', y', z')$ e em um momento t' $\Rightarrow$ em S, a posição e o momento serão diferentes, mesmo que tenhamos sincronizado os relógios situados nas origens dos sistemas, quando estas origens estão sobrepostas.

$\Rightarrow$ No caso de conhecermos as informações em S', ou seja, conhecemos $P(x', y', z')$ e t', podemos calcular $P(x, y, z)$ e t, através das transformações de Lorentz. //

Pela simetria da situação utilizada, a transformação de $S \longrightarrow S'$ é dada por:

★ $x' = \gamma(x - ut)$ ★ $z' = z$

★ $y' = y$ ★ $t' = \gamma\left(t - \frac{u \cdot x}{c^2}\right)$

A partir destas transformações chegamos em várias, inesperadas, intrigantes, importantes, quase inaceitaveis, e de grande sucesso experimental e de aplicações tecnológicas, **resultados; a saber:**

1) Dilatação do tempo:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \qquad \text{com} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad ; \quad \gamma > 1.$$

sendo Δt = "distância" temporal entre dois eventos que ocorrem em um mesmo ponto de S', mas observado de S.

$\Delta t'$ = "distância" temporal entre dois eventos que ocorrem num mesmo ponto de S', e observado em S'.

Sendo assim, se alguém nasce e morre em S' (sem sair do lugar) tendo um tempo de vida $\Delta t'$.

[Obs: Dois eventos $\Rightarrow$ 1º evento = nascer ; 2º evento = morrer]

então estes dois eventos observados do sistema S demoram $\Delta t = \gamma \Delta t'$ para ocorrer, ou seja, observando de S o tempo de vida é maior se $\gamma > 1$, $\Rightarrow$ se $u \neq 0$.

Contração do comprimento

$$\Delta L = \frac{\Delta L'}{\gamma}$$

Obs: estamos "observando" algo em S' mas estando em S.

"Pensem sobre esta equação".

Transformação de velocidade:

⇒ Se é conhecida a velocidade de uma partícula relativamente a S', digamos $\vec{v'} = v_{x'}\hat{i} + v_{y'}\hat{j} + v_{z'}\vec{k}$ quais seriam as velocidades, se observadas de S?

$$v_x = \frac{v_{x'} + u}{1 + \frac{v_{x'} \cdot u}{c^2}}$$

$$v_y = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\left(1 + \frac{v_{x'} \cdot u}{c^2}\right)} \cdot v_{y'}$$

$$v_z = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\left(1 + \frac{v_{x'} \cdot u}{c^2}\right)} \cdot v_{z'}$$

com $\beta^2 = \frac{u^2}{c^2}$

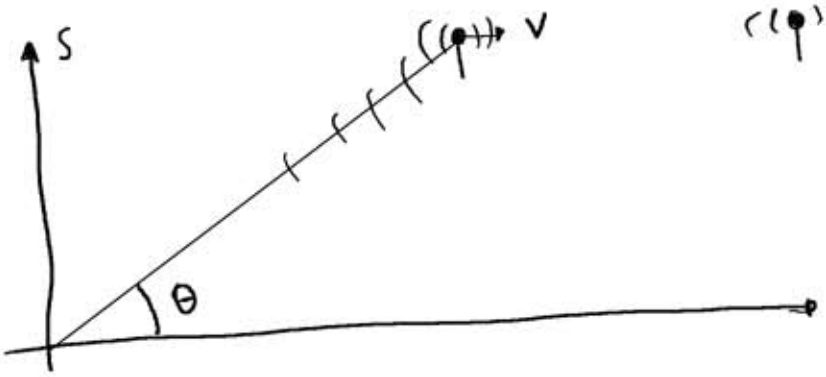
Efeito Doppler relativístico.

É natural imaginar que frequências de ondas eletromagnéticas (luz) provenientes de uma fonte fixa em S', por exemplo, sejam diferentes quando observadas de S. Afinal, $f = \frac{1}{T}$, sendo T = intervalo entre dois eventos (dois pulsos de luz) que ocorrem em um mesmo ponto de S'.

Vimos então que: ($\nu \equiv$ frequência)

$$\nu = \frac{\nu'}{\gamma\left(1 - \beta\cos(\theta)\right)} \qquad \beta = v/c$$

representando a seguinte situação:



"$(\!(\bullet)\!)$" = transmissor com frequência natural ν'

"Perca um tempo, ou melhor, ganhe um tempo", refletindo sobre esta relação de frequências.

Dica: faça θ tender à valores "extremos".

Momento relativístico:

Vimos que o momento linear relativístico, definido de forma similar ao momento linear newtoniano ($\vec{p} = m.\vec{v}$), é conservado se:

1) $$m \longrightarrow m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

sendo m_0 a massa medida no referencial de repouso da partícula em questão.

$$\Rightarrow \vec{p}_{(\text{relativístico})} = m(v).\vec{v} = \gamma . m_0 . \vec{v}$$

Energia relativística:

A lei fundamental de Newton é mantida na relatividade:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad *$$

mas $\vec{p}$ assume a forma relativística $\vec{p} = m(v).\vec{v}$

Assumindo valida a lei de conservação de energia

$\Rightarrow$ a variação da energia cinética ΔE_c é resultado de um trabalho realizado por alguma força $\vec{F}$

↪

$$\Delta E_c = E_{c_{final}} - E_{c_{inicial}}$$

1) Definindo $E_{c_{inicial}} = \text{zero}$ e $E_{c_{final}} = E_c$

$$\Rightarrow E_c = \int_0^v \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

consideremos, por simplicidade, que $\vec{F}$ é paralelo a $d\vec{\ell}$.

$$\Rightarrow E_c = \int_0^v F \cdot d\ell = \int_0^v \frac{dP}{dt} d\ell$$

$$E_c = \int_0^v dP \cdot \frac{d\ell}{dt}, \quad \text{mas} \quad \frac{d\ell}{dt} = v$$

$$E_c = \int_0^v v \cdot dP = \int_0^v v \, d[m(v).v]$$

Mas $d[m(v).v] = m(v)\,dv + v\,dm(v)$

$$E_c = \int_0^v [v m(v) dv + v^2 dm(v)]$$

Se $m = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$

$$dm = m_0 \cdot \cancel{\tfrac{1}{2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \cdot \cancel{2} \frac{v}{c^2} \cdot dv$$

$$c^2 dm = \frac{m_0 v\, dv}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2}}$$

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/1} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1}$$

$$c^2 dm = m v dv \cdot \frac{1}{\left(1 - v^2/c^2\right)}$$

$$c^2 dm - c^2 dm \frac{v^2}{c^2} = m.v.dv$$

$$c^2 dm = mvdv + v^2 dm$$

Logo

$$\int_0^v [mvdv + v^2 dm] = \int_0^v c^2 dm = c^2 \int_{m_0}^{m} dm$$

$$\Rightarrow E_c = c^2 \left[m \right]_{m_0}^{m(v)}$$

$$\boxed{E_c = mc^2 - m_0 c^2} \quad (*)$$

Esta é a energia cinética relativística.

Observem que existe um termo constante $\underline{m_0 c^2}$.

mc^2 depende da velocidade pois $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

se $v=0$ $m = m_0$ e

// $E_c = 0$ // como esperado.

Para $v \neq 0 \Rightarrow$ $E_c + m_0 c^2 = mc^2$

$m_0 c^2$ → energia associada ao repouso (m_0)

E_c → " " ao movimento.

$$E_{repouso} + E_{movimento} = E_{total} = mc^2 \Rightarrow \boxed{E = mc^2}$$

Assim $\underline{mc^2}$ corresponde a toda energia que uma partícula pode liberar //.

// Relação entre emergia e momento relativísticos.

Muitos problemas om relatividade são resolvidos de forma mais direta através de uma relação explícita emtre Emergia (E) e momento (P).

*

Como vimos anteriormente, a emergia cinética E_c pode ser escrita como segue:

$$E_c = E - E_0 \quad ; \text{ sendo } \begin{cases} E = mc^2 = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ E_0 = m_0 c^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E^2 - E_0^2 = \frac{(m_0 c^2)^2}{1 - v^2/c^2} - (m_0 c^2)^2$$

$$E^2 - E_0^2 = (m_0 c^2)^2 \cdot \left[\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 \right]$$

$$\Rightarrow E^2 - E_0^2 = (m_0 c^2)^2 \cdot \left[\frac{1 - (1 - v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2} \right]$$

$$\Rightarrow E^2 - E_0^2 = (m_0 c^2)^2 \cdot \left[\frac{v^2/c^2}{1 - v^2/c^2} \right]$$

$$E^2 - E_0^2 = v^2 c^4/c^2 \cdot \left[\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right]^2$$

$$\Rightarrow E^2 - E_0^2 = v^2 c^2 \cdot m^2$$

pois $\dfrac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m$ " $m = m(v) \neq m_0$ "

$$E^2 - E_0^2 = (mvc)^2$$

mas $mv = p$ "p = momento relativístico"

$$\Rightarrow E^2 = (pc)^2 + E_0^2 \qquad \text{como} \quad E_0 = m_0c^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2}$$

Analisando termo a termo:

- E = energia total $\longrightarrow$ cinética + repouso.
- m_0c^2 = energia de repouso.
- pc = energia cinética relativística

— 11 —

"Aspécto interessante"

? Será que uma partícula de massa zero (Ex: o fóton) possui momento linear ?

Um fóton é um pulso de Luz (onda eletromag.).

Veremos em quântica que cada fóton carrega uma quantidade de energia proporcional à frequência (ν) da onda a que está associado.

$$\Rightarrow \boxed{E_{\text{fóton}} \propto \nu}$$

$\propto$ = símbolo de proporcional.

$\Rightarrow$ então $E_{fóton} = h\nu$, sendo h = constante de proporcionalidade.

então, mesmo com $m_0 = 0$

$\Rightarrow$ $E^2 = (pc)^2 + \cancel{(m_0c^2)^2}$

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} \Rightarrow p = \frac{E}{c}$$

$$\boxed{p = \frac{h\nu}{c}}$$

↳ diz que uma onda eletromagnética, constituída por mediadores sem massa detectável é capaz de transmitir momento ao se "chocar", por exemplo, com um espelho.

observe que $c = \lambda\nu \Rightarrow \frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda}$

$\Rightarrow$ $\boxed{p = \frac{h}{\lambda}}$ → Esta relação é a origem (ou a principal) da mecânica quântica, como veremos a seguir.

FIM