2.1. INTRODUÇÃO

A apresentação de dados numÈricos na forma de gráfico È uma tÈcnica usada em muitas áreas, não somente por físicos e engenheiros.

A larga utilização de gráficos (dados tabulados dispostos num plano cartesiano) deve-se à facilidade de obtenção de informação a partir deles. Os gráficos permitem uma visualização imediata do comportamento das variáveis do fenômeno estudado. Por exemplo, o gráfico da figura 1 foi construído a partir dos dados apresentados na tabela 1.

Tempo (s)	Velocidade (cm/s)
8	0,8
13	1,3
16	2,3
20	3,2
25	4,3
30	4,7
34	3,9
35	3,2
37	2,7
40	1,7
42	1,2
46	0,7

Tabela 1: Velocidade de um corpo em função do tempo.

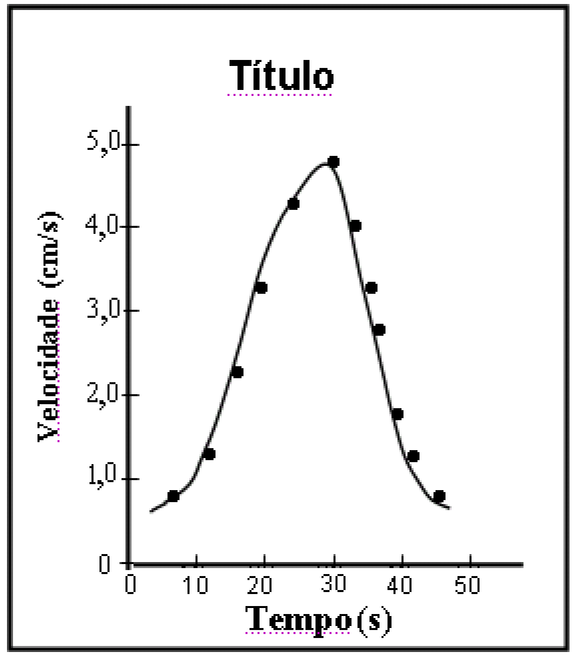


Fig.1: Gráfico da velocidade de um corpo em função do tempo.

Pode-se verificar a facilidade de obtenção de informações atravÈs do gráfico comparado com a tabela. AlÈm deste aspecto, existem duas outras vantagens na utilização de gráficos:

a)Geralmente È possível obterem-se rápida e facilmente, atravÈs da análise gráfica, informações cuja obtenção por outras tÈcnicas poderiam ser trabalhosas. Por exemplo, considere o problema da determinação analítica, atravÈs da tabela 1, do instante para o qual a velocidade È máxima, e do valor dessa velocidade. Por outro lado, È simples obter-se estas respostas atravÈs do gráfico. A utilização de gráficos constitui uma maneira muito fácil de se obter outros valores das variáveis dependentes e independentes, atravÈs de interpolação e extrapolação.

b)As tÈcnicas de gráfico são extremamente úteis na comparação de dados teóricos e experimentais. Isto pode ser realizado de duas maneiras:

b_1) AtravÈs do gráfico traçado a partir de dados experimentais, podemos estabelecer a relação matemática entre as variáveis e compará-la com a relação teórica;

b_2) Podemos traçar a curva teórica e a experimental num mesmo sistema de eixos e então compará-las.

Nos dois casos qualquer discrepância entre teoria e experimento È facilmente observada.

Em trabalho científico, È freqüente o uso de escalas logarítmicas para se testar a hipótese de que existe uma relação de potência entre as variáveis dependente e independente e, conseqüentemente, obter-se o valor dessa potência. Discutiremos tambÈm esse tipo de escala.

2.2. ASPECTOS QUE DEVEM SER OBSERVADOS NA CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS

a)<u>Título</u>

O gráfico deverá conter todas as informações necessárias à sua compreensão, de tal modo que seja auto-suficiente, evitando dessa forma que se leia todo o texto no qual está inserido para se saber do que se trata.

Deve-se escolher um título conciso e auto explicativo.

b)<u>Os eixos</u>

É **norma universal** colocar a variável independente no eixo das abcissas e, a dependente no das ordenadas. Inverter a norma de colocação das variáveis dependentes e independentes não invalida o gráfico, <u>porÈm essa prática não È desejável</u> porque introduz dificuldades desnecessárias.

Escreve-se o nome das grandezas lançadas, nos eixos das abcissas e das ordenadas, respectivamente.

No gráfico, três coisas precisam estar claras em relação a cada eixo:

1)O nome da grandeza física a ser colocada no eixo: a grandeza física È escrita, por extenso, abaixo da abcissa (a variável independente) e ao longo da ordenada (a variável dependente);

2)As unidades empregadas: as unidades devem ser escritas nos eixos, logo a seguir às grandezas físicas e separadas destas por vírgula ou parênteses;

3)Os valores numéricos da grandeza representados por intervalos adequados ao longo dos eixos: os valores numÈricos lançados nos eixos devem ser representados por intervalos iguais, múltiplos da unidade escolhida, como mostra a figura 2 (a).

A figura 2 (b) mostra o mesmo gráfico onde os valores numÈricos nos eixos estão indicados de <u>modo incorreto</u>. Esta È uma <u>prática ruim</u> porque pode levar o leitor a pensar que a escala não È linear, quando na verdade ela o È.

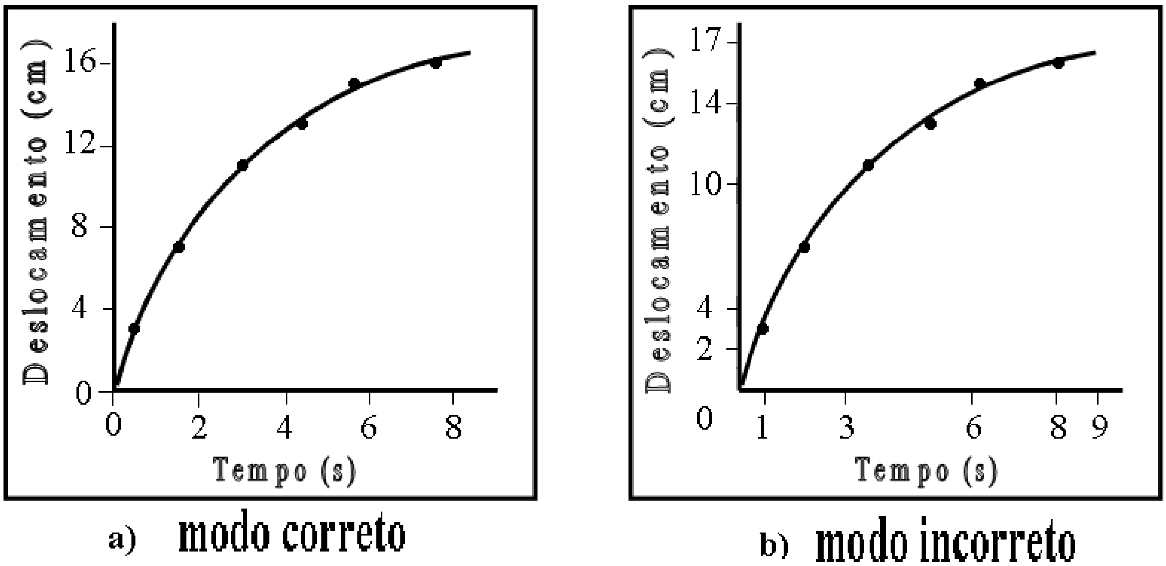


Fig. 2: Modo de se indicar os valores numéricos ao longo dos eixos

Quando for necessário ressaltar algum ponto, alÈm de representar a unidade, indique estes pontos da maneira mostrada na figura 3.

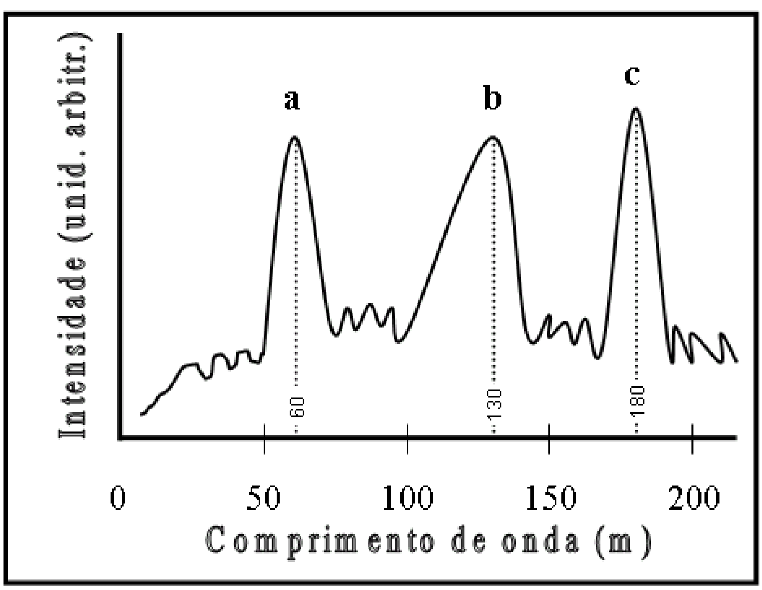


Fig. 3: Espectro do arco voltaico. Note que alguns pontos foram ressaltados.

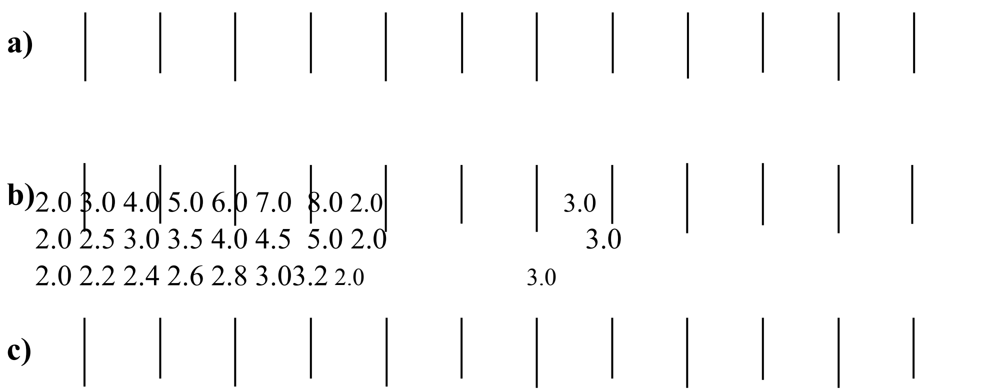
c)<u>Escala</u>

Deverá estar de acordo com os algarismos significativos dos dados e deverá ser escolhida de maneira que **facilite a interpolação** e que permita que todos os pontos experimentais fiquem contidos no papel, de forma a que o **gráfico ocupe todo o papel e não fique comprimido em um canto**.

As escalas devem ser de fácil leitura; para tanto sugerimos a seguinte regra:

•À variação de uma unidade do algarismo menos significativo da escala (o de menor ordem) faça corresponder 1, 2, 5 ou 10 divisões no papel milimetrado, de forma que o gráfico ocupe a maior área possível no papel, alÈm de facilitar a leitura de valores intermediários.

Veja os exemplos a seguir (a experiência forneceu dois algarismos significativos):



O gráfico ocupará maior extensão do papel no caso c); veja as posições ocupadas pelos números 2,0 e 3,0 nos casos a), b) e c).

d)Barras de incertezas

Os valores experimentais deverão ser representados com suas respectivas incertezas indicadas por meio de **barras simétricas em relação ao ponto** assinalado e de **comprimento total igual ao dobro da incerteza**. Veja a figura 4.

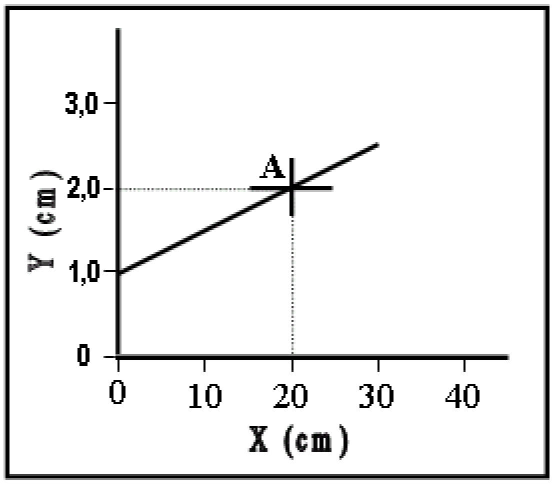


Fig. 4: Barras de Incerteza.

Ponto A:

$$\begin{cases} x \pm \Delta x = (20 \pm 5)\ \text{cm} \\ y \pm \Delta y = (2{,}0 \pm 0{,}3)\ \text{cm} \end{cases}$$

2.3. ANÁLISE GRÁFICA

A análise gráfica È muito útil, pois permite, em muitos casos, descobrir a lei que rege um fenômeno físico. O conhecimento dessas leis È muito importante para a elaboração de modelos teóricos que expliquem o fenômeno.

Imagine que estivÈssemos tentando verificar como varia o comprimento (L) de uma barra metálica em função da temperatura (T). A fórmula que dá o novo comprimento da barra após um acrÈscimo δT na temperatura È:

$$L = L_0(1 + \alpha\ \delta T) = L_0 + \alpha\ L_0 \delta T \quad (4)$$

Sabemos que, em escalas lineares, uma reta È sempre descrita por uma equação do tipo:

$$\mathbf{Y = m\,X + b} \qquad (5)$$

A inclinação da reta fornece o valor do **coeficiente angular (m)** da reta.
A interseção da reta com o eixo dos Y fornece o valor de **b**, o **coeficiente linear** da reta, se o eixo Y passar por x = 0.

Comparando a expressão (4) com a (5) vemos a correspondência entre suas respectivas variáveis e parâmetros constantes:

L	----------	Y	(variável)
δT	----------	X	(variável)
L_0	----------	b	(constante)
$\alpha\ L_0$	----------	m	(constante)

<u>Note que só podemos determinar equações de retas com papÈis que tenham escalas lineares</u>, como o milimetrado, por exemplo.

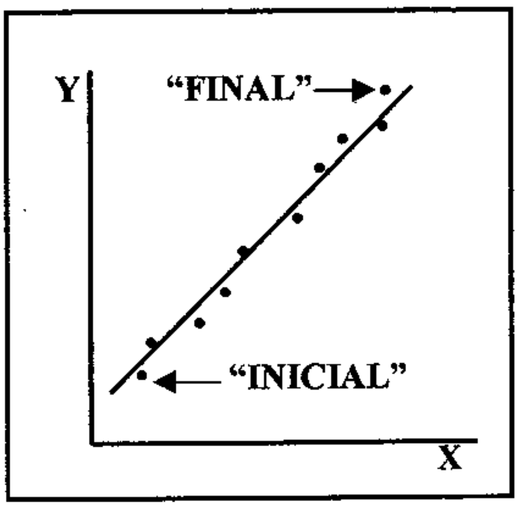
Os parâmetros que determinam a equação de qualquer outro tipo de curva não podem ser obtidos facilmente com esse tipo de papel. Outros tipos de papÈis com escalas monologarítmicas e dilogarítmicas são utilizados nesses casos.

Chamamos a atenção para o fato de que a inclinação da reta, tg(Θ), dependerá da particular escala adotada nos eixos, <u>mas o valor do coeficiente angular não depende da escala adotada</u>.

Para a determinação do coeficiente angular da reta ($m = \alpha \ L_0$) deve-se, portanto, levar em conta a escala utilizada.

Os pontos obtidos na experiência devem ser marcados no papel milimetrado.

Traça-se a seguir uma reta média (fig. 5). Os mÈtodos analíticos para a obtenção desta reta não serão estudados nesta disciplina.



<u>Reta média</u>
é a reta mais provável e ela não passa necessariamente sobre os pontos marcados no papel, nem mesmo sobre os pontos "inicial" e "final".

Fig. 5: Reta Média

A reta mÈdia deve ser traçada usando-se uma rÈgua transparente;

- As escalas devem ser construídas conforme as instruções contidas nas folhas anteriores deste texto, referentes à construção e interpretação de gráficos;
- O número de algarismos escritos na escala deverá corresponder ao número de algarismos significativos obtidos na experiência, exceto nos casos em que a menor divisão do papel não o permita.

2.3.1. Coeficiente angular da reta média

Para avaliar o coeficiente angular da reta mÈdia escolha dois pontos sobre a reta conforme sugerem os pontos **P** e **Q**, na figura 6.

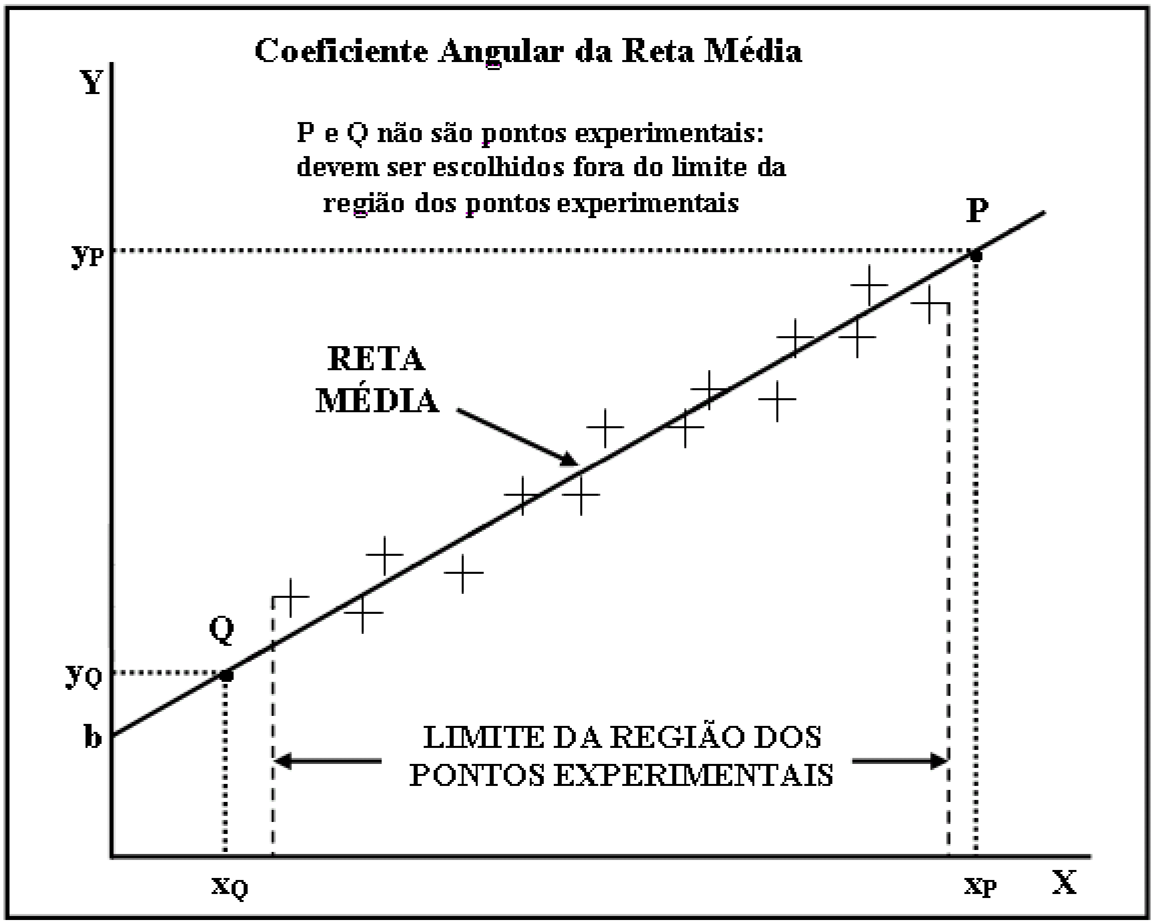


Figura 6: Coeficiente angular da reta média $m = (y_P - y_Q)/(x_P - x_Q)$

P e **Q** devem ser marcados **fora** da região delimitada pelos pontos experimentais, de forma a obter-se **m** com maior quantidade de algarismos.

O coeficiente angular da reta será dado por:

$$\boxed{m = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}}$$

2.3.2. INCERTEZA DO COEFICIENTE ANGULAR DA RETA MÉDIA

Para estimar a incerteza no coeficiente angular da reta mÈdia considere as **duas diagonais** do quadrilátero **ABCD** como mostra a figura 7.

Para obter os segmentos de reta **AB** e **CD** proceda da seguinte forma:

a)Assinale em cada janela de incerteza o **vértice mais distante da reta média**: **resultará um conjunto de pontos acima da reta média e outro abaixo**.

b) O conjunto de pontos que ficou **acima** da reta mÈdia permite traçar **uma reta média auxiliar** e determinar o segmento **AB pela interseção desta reta com as verticais traçadas por** x_i **e** x_f. O segmento **CD** será obtido de forma análoga.

c)Então, calcule **± Δ m** a partir dos **coeficientes angulares das duas diagonais**, BD e CA, do quadrilátero ABCD.

$$\pm\ \Delta\ m = \pm\ \tfrac{1}{2}\,(\,m_{sup.} - m_{inf.}\,)\ ,\ \text{sendo} \begin{cases} m_{sup.} = (y_B - y_D)\ /\ (x_f - x_i) \\ \text{e} \\ m_{inf.} = (y_C - y_A)\ /\ (x_f - x_i) \end{cases}$$

Substituindo-se **m** sup. e **m** inf. na expressão de **± Δ m** definida acima, obtÈm-se:

$$\boxed{\pm\Delta m = \pm\ \frac{1}{2}\ \frac{(y_A - y_D) + (y_B - y_C)}{x_f - x_i}} \qquad \textbf{(6)}$$

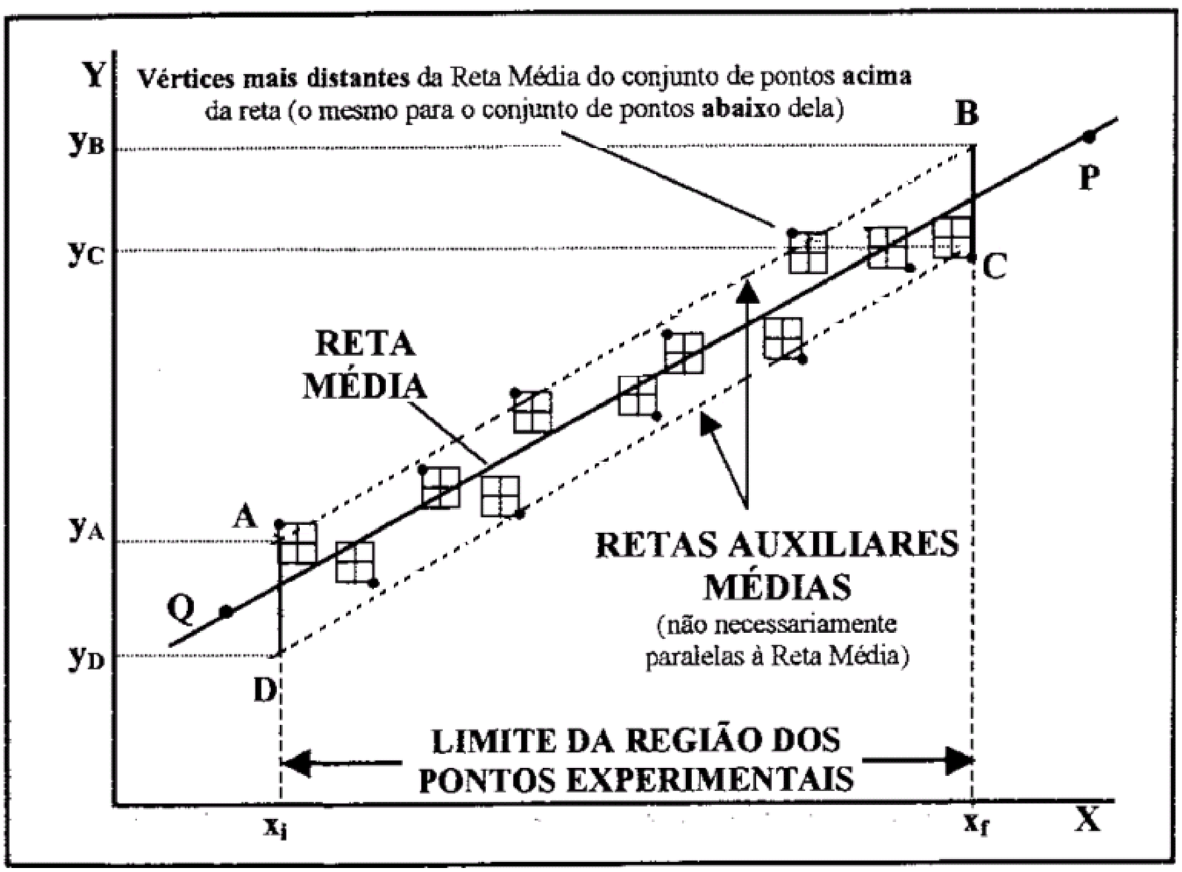


Fig. 7: Incerteza do coeficiente angular da reta média (± Δ m)

2.3.3. Incerteza do Coeficiente Linear da Reta Média (± Δ b)

No gráfico da figura 7, prolongando-se as duas diagonais **AC** e **BD** do quadrilátero ABCD, atÈ que elas interceptem o eixo Y, obtem-se dois pontos neste eixo que chamaremos, respectivamente, de $\mathbf{b}_{\mathbf{sup.}}$ e $\mathbf{b}_{\mathbf{inf.}}$.

A **incerteza do coeficiente linear** da reta mÈdia será dada por:

$$\pm\Delta b = \pm\frac{\text{١}}{\text{٢}}\left(b_{\text{sup}} - b_{\text{inf}}\right)$$

2.3.4. Casos particulares de cálculo da Incerteza do Coeficiente Angular

<u>Caso a</u>**: As barras de incerteza nas medidas de x e y são todas iguais e a reta média passa sobre todos os pontos experimentais.**

Neste caso, nas medidas de x e y, os erros acidentais são desprezíveis ou nulos.

O coeficiente angular da reta pode ser obtido diretamente dos pontos inicial e final utilizando-se a expressão para determinar o coeficiente angular dessa reta com os pontos P e Q substituídos por F (último ponto à direita) e I (primeiro à esquerda):

$$m = \frac{(\mathrm{y}_F - \mathrm{y}_I)}{(x_F - x_I)}$$

Esta expressão È do tipo m = (a ± Δ a) (b± Δ b) $^{-1}$, com:

$a = Y_F - Y_I$
$b = X_F - X_I$
$\Delta\ a = \Delta\ Y_F + \Delta\ Y_I$
$\Delta\ b = \Delta\ X_F + \Delta\ X_I$

Observe-se que utilizamos o critÈrio mais desfavorável, somando as incertezas na subtração de duas grandezas, como estudamos anteriormente (página 6).

Utilizando a expressão (3) para a propagação de incertezas (página 11):

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \qquad \text{ou seja,}$$

$$\Delta m = \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right) m = \left(\frac{\Delta y_F + \Delta y_I}{y_F - y_I} + \frac{\Delta x_F + \Delta x_I}{x_F - x_I}\right)\frac{y_F - \mathrm{y}_I}{x_F - \mathrm{x}_I}$$

$$\Delta\mathrm{m} = \frac{\Delta y_F + \Delta y_I}{x_F - x_I} + m\,\frac{\Delta x_F + \Delta x_I}{x_F - x_I}$$

Se as incertezas no valor de cada grandeza forem iguais, isto È, se $\Delta\ y_P = \Delta\ y_Q = \Delta\ y$ e $\Delta\ x_P = \Delta\ x_Q = \Delta\ x$, obtemos para a incerteza do coeficiente angular da reta mÈdia nesta situação específica:

$$\pm\Delta m = \pm\ \frac{\blacksquare(\Delta y + m\ \Delta x)}{x_F - x_I}$$

(7)

A equação (7) poderá ser utilizada apenas no caso de <u>todos</u> os pontos caírem sobre a reta; a equação (7) é muito útil quando <u>não é possível</u> traçar as barras de incerteza, se elas forem menores do que a menor divisão da escala, por exemplo. Se as incertezas forem diferentes entre si, Δ y e Δ x serão as mÈdias aritmÈticas dos vários valores de Δ y e/ou Δ x.

<u>Caso b</u>**: As barras de incerteza nas medidas de x e y são todas nulas (incertezas menores que a menor divisão da escala adotada), e a reta média não passa sobre todos os pontos experimentais** (figura 8).

Neste caso, para se determinar a incerteza do coeficiente angular, traçam-se duas **retas médias auxiliares** com os conjuntos de pontos que caem **fora da reta média**, como mostra a figura 8, isto È:

- uma reta mÈdia auxiliar passando pelo conjunto de pontos **acima** da reta mÈdia;
- a outra passando pelo conjunto de pontos **abaixo** da reta mÈdia.

Tal como anteriormente (figura 7), podemos obter o quadrilátero ABCD e a expressão para a incerteza do coeficiente angular da reta mÈdia (± Δ m) que será dada, tambÈm, pela equação já estudada (6).

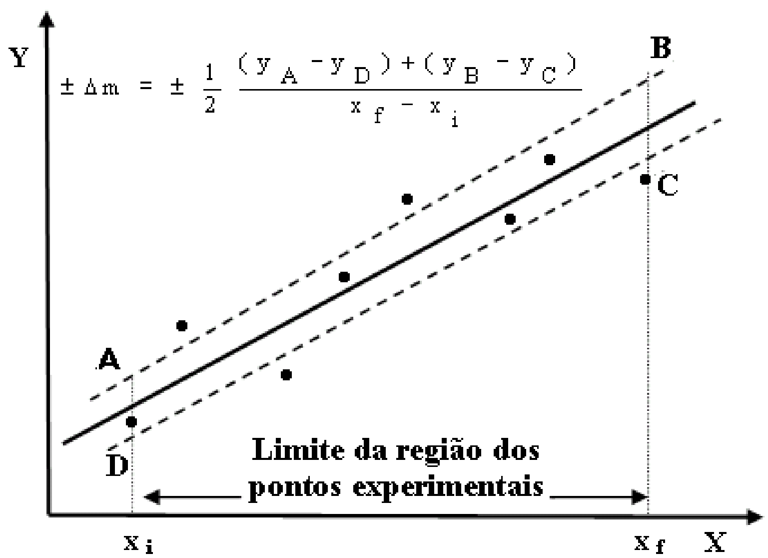


Figura 8: Gráfico para determinação da incerteza do coeficiente angular da reta mÈdia, quando não È possível traçar as barras de incerteza e existem pontos experimentais fora da reta.

2.4. GRÁFICOS EM PAPEL MONO-LOG[3]

O gráfico da figura 9 representa a função:

[3] No texto nos referimos a logaritmos na base 10; os logaritmos podem ser convertidos para a base e.

log (Y) = log (Y_0) + λ X

Escolhe-se para origem de Y uma potência de dez ($10^{\pm N}$). No exemplo da figura 9 escolheu-se o valor 0,10 para origem de Y.

A escala no eixo Y foi construída de tal forma que a distância de qualquer ponto deste eixo atÈ a origem È proporcional à diferença entre log (Y) e log (0,10). Observe que Y nunca se anula nesta escala. Porquê?

O <u>eixo log (Y)</u> não existe no papel mono-log. A escala no <u>eixo log (Y)</u> È linear e foi desenhada apenas para esclarecer a construção da <u>escala Y, que È não linear</u>.

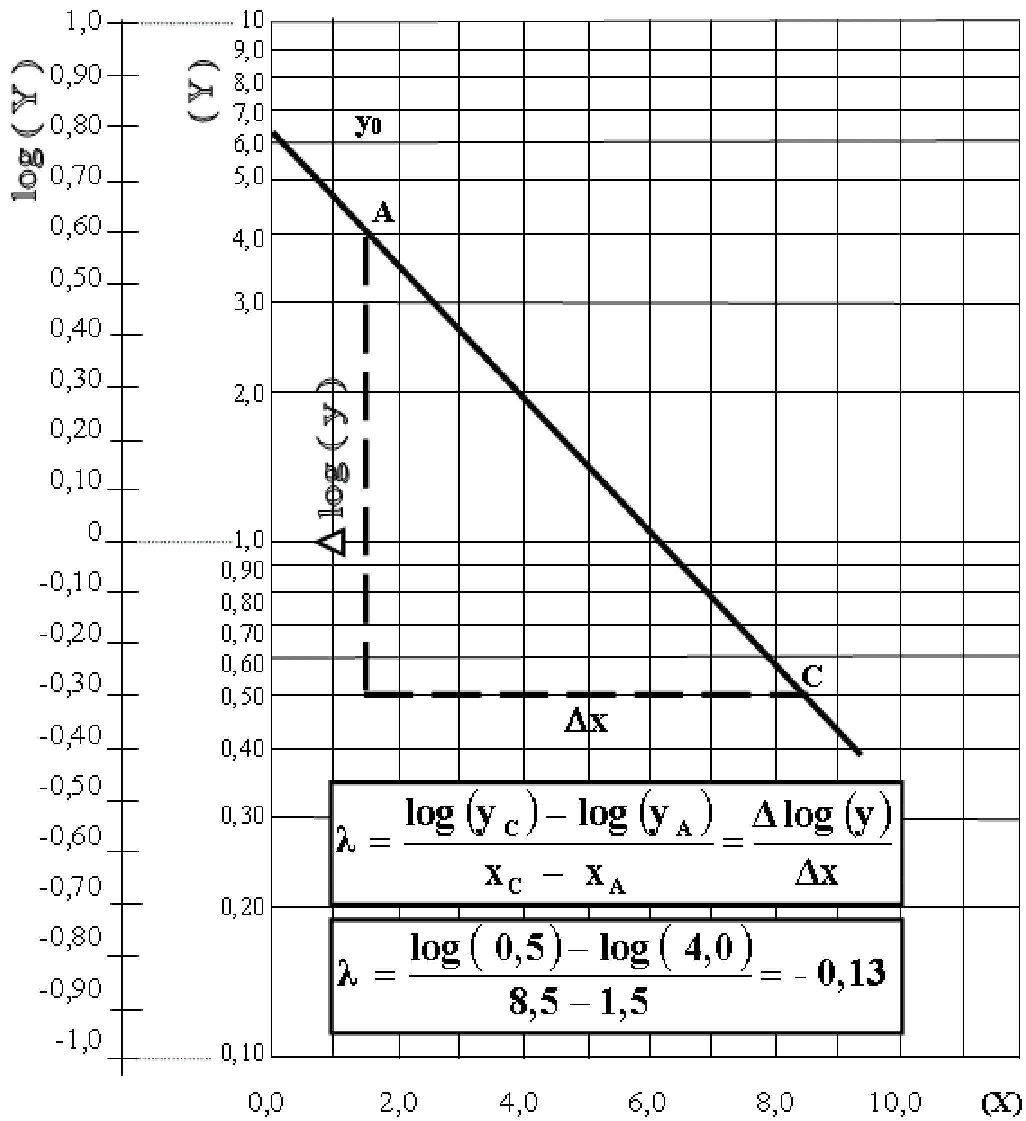


Fig. 9: Gráfico em papel monolog: coeficiente angular da reta média

<u>A cada número gravado na escala Y corresponde, na escala linear log(Y), outro número: o logaritmo de Y na base 10.</u>

No cálculo do coeficiente angular da reta **(λ)**, È preciso considerar que o comprimento de um dos catetos do triângulo, representa a diferença entre dois logaritmos (figura 9).

De que forma você poderá obter a incerteza do coeficiente angular da reta, $\pm\ \Delta\lambda$, nesta escala?

Seguem-se todos os procedimentos para a determinação da incerteza do coeficiente angular da reta mÈdia em papel milimetrado, o que inclui desenhar as barras de incerteza e as retas auxiliares mÈdias, e faz-se a adaptação necessária na equação (6), **substituindo-se** os valores de y_A, y_B, y_C e y_D pelos respectivos logaritmos.

RECOMENDAÇÕES IMPORTANTES: RESUMO

- **Número de Algarismos:**
- Nos cálculos intermediários usar, no mínimo, três algarismos "significativos" em excesso nas incertezas.
- Os resultados anteriores aos arredondamentos devem ser guardados para os outros cálculos.
  Na apresentação dos resultados finais, apresentar a incerteza com UM único algarismo significativo.
- **Os gráficos devem conter:**
  - **Título (conciso e bem explicativo);**
  - **Os nomes das grandezas físicas, escritos por extenso, lançados ao longo dos eixos (variável independente no eixo das abcissas e a dependente no das ordenadas);**
  - **A indicação das unidades dessas grandezas, separadas dos nomes das grandezas por uma vírgula ou parênteses;**
  - **Os valores numéricos lançados nos eixos, representados por intervalos iguais;**
  - **A indicação das escalas utilizadas.**

Na construção das escalas:

- **Deve-se escolher a escala de forma a que o gráfico ocupe a maior região possível do papel;**
- **Deve-se utilizar o menor n.º de algarismos compatível com os dados ou a menor divisão do papel**

ANEXO

A VELOCIDADE DA LUZ E O METRO PADRÃO

O melhor valor obtido para a velocidade da luz no vácuo, atÈ outubro de 1983, era 299.792.458 m/s e estava afetado por uma incerteza de ± 1,2 m/s. Esta incerteza, de 4 partes em 10^9, era quase inteiramente devida às limitações do metro padrão.

Adotava-se desde 1960 o comprimento de onda da luz vermelho-alaranjada do criptônio 86 como padrão de comprimento, e a partir dele definia-se o metro.

O padrão de tempo (o segundo) no entanto, podia ser determinado com **uma incerteza de uma parte em 10^{13}** (um segundo em 300.000 anos), usando-se o "relógio de CÈsio".

As dificuldades que impediam de se melhorar as medidas do comprimento atÈ 1983, foram removidas em outubro daquele ano pela Conferência Geral de Pesos e Medidas, reunida em Paris. Naquela ocasião decidiu-se abandonar o padrão de comprimento baseado na luz do criptônio e redefinir o metro a partir da unidade de tempo.

UM METRO, É A DISTÂNCIA PERCORRIDA PELA LUZ NO VÁCUO DURANTE UM INTERVALO DE TEMPO DE UM SEGUNDO DIVIDIDO POR 299.792.458

Adotou-se um único padrão para as medidas de tempo e de comprimento: o **"relógio de Césio"**.

**A velocidade da luz no vácuo, que é uma constante universal,
passou a valer 299.792.458 m/s, por definição.**

EXERCÍCIOS

1) São dados:

$$\begin{cases} A = a \pm \Delta a = (1{,}60 \pm 0{,}01) \\ B = b \pm \Delta b = (3{,}15 \pm 0{,}07) \\ C = c \pm \Delta c = (2{,}8037 \pm 0{,}0002) \end{cases}$$

Calcule, **algebricamente** e depois **numericamente**, com incerteza:

a) $A + B$ **b)** $A - C$ **c)** AB **d)** $A + BC$

e) $A + \dfrac{B}{C}$ **f)** $\sqrt{A^3} + B\,C^2$ **g)** $\dfrac{A}{\sqrt{B}} + C$

h) cos (A) com A em graus **i)** cos (A) com A em radianos

j) ln (B) **k)** log (B)

---

2) Calcular com o n.º correto de algarismos significativos e dar a resposta em **notação científica**:

a) $(2{,}72 \times 0{,}0026 \times 7318) / (3{,}93 \times 38{,}1)$

b) $2{,}14 \times 10^6 + 2{,}14 \times 10^4$

c) 5473,4 mm – 4,2 m

d) 2532 – 32

e) 35,254 m + 4,7 cm

f) 35,254 cm + 4,7 m

g) $\pi \times e$

h) $\pi / V_{\text{luz no vácuo}}$

---

3) Considere a tabela abaixo. Ela apresenta as posições sucessivas de um certo objeto, em movimento retilíneo e uniforme.

Tempo (s) $\pm \Delta t = \pm$ **0,0001 s**	0,1400	0,2000	0,3200	0,4400	0,5200	0,6400
Posição (mm) $\pm \Delta x = \pm$ **1 mm**	341	364	397	438	459	467

Marque os pontos em papel milimetrado, trace a reta mÈdia e obtenha a velocidade do objeto (coeficiente angular da reta). Desenhe as barras de incerteza e obtenha ($v \pm \Delta v$).

Referências Bibliográficas

1 - HELENE, A. M. O.; VANIN, V. R. **Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental**. 2ª. Edição. São Paulo: Edgard Blucher, 1991.

2 - Física Experimental I: Laboratório de Física. 2008. 66f. Apostila. Departamento de Física, Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2008.

Agradecimentos à coordenação das disciplinas de Física Experimental I (do Departamento de Física, Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal do Espírito Santo) pela permissão de uso da apostila [2].