



Prof. Paulo Sérgio Moscon

Gráficos: Construção e Análise

Construção de Gráficos

Um gráfico é a representação visual da relação entre duas grandezas medidas e constitui, frequentemente, a forma mais clara de apresentar dados experimentais, permitindo identificar leis físicas conhecidas ou sugerir novas relações. Diferentemente do que é comum em trabalhos escolares, artigos científicos não costumam inserir um título sobre o próprio gráfico – essa informação cabe à legenda (*caption*) da figura, que deve ser detalhada o suficiente para que o gráfico seja compreendido de forma autônoma, sem que o leitor precise recorrer ao texto principal para entendê-lo.

Na construção de um gráfico, deve-se:

- identificar cada eixo com o nome da grandeza física representada e a sua unidade – por exemplo, “Tempo (s)” no eixo horizontal e “Distância percorrida (m)” no eixo vertical –, atribuindo a variável independente ao eixo horizontal e a variável dependente ao eixo vertical;
- escolher escalas convenientes, que aproveitem adequadamente a área disponível e evidenciem a variação real dos dados – começar do zero nem sempre é a melhor escolha: se os dados ocupam uma faixa estreita, distante da origem, forçar a escala a incluir o zero pode comprimir os pontos e esconder justamente a variação que se quer mostrar;
- indicar as barras de incerteza em cada ponto experimental, tanto na variável independente quanto na dependente, sempre que essas incertezas tiverem sido de fato determinadas.

Essa última recomendação vale apenas quando os pontos experimentais foram coletados com suas respectivas incertezas – o que nem sempre ocorre, e nem sempre é necessário. No método dos mínimos quadrados, por exemplo, as incertezas de cada ponto não entram no cálculo dos parâmetros do ajuste, de modo que sua ausência no gráfico não compromete a obtenção da reta (ou curva) ajustada – apenas deixa de comunicar visualmente a confiabilidade de cada medida individual.

A legenda da figura, por sua vez, deve descrever com clareza tudo o que está sendo mostrado: o que representam os eixos (incluindo suas grandezas físicas e unidades), o significado dos símbolos e das cores utilizados – pontos experimentais, barras de incerteza, curvas de ajuste – e, quando houver, a equação empregada no ajuste dos dados.

A Figura 1 apresenta um exemplo ilustrativo, com dados fictícios, construído seguindo essas recomendações.

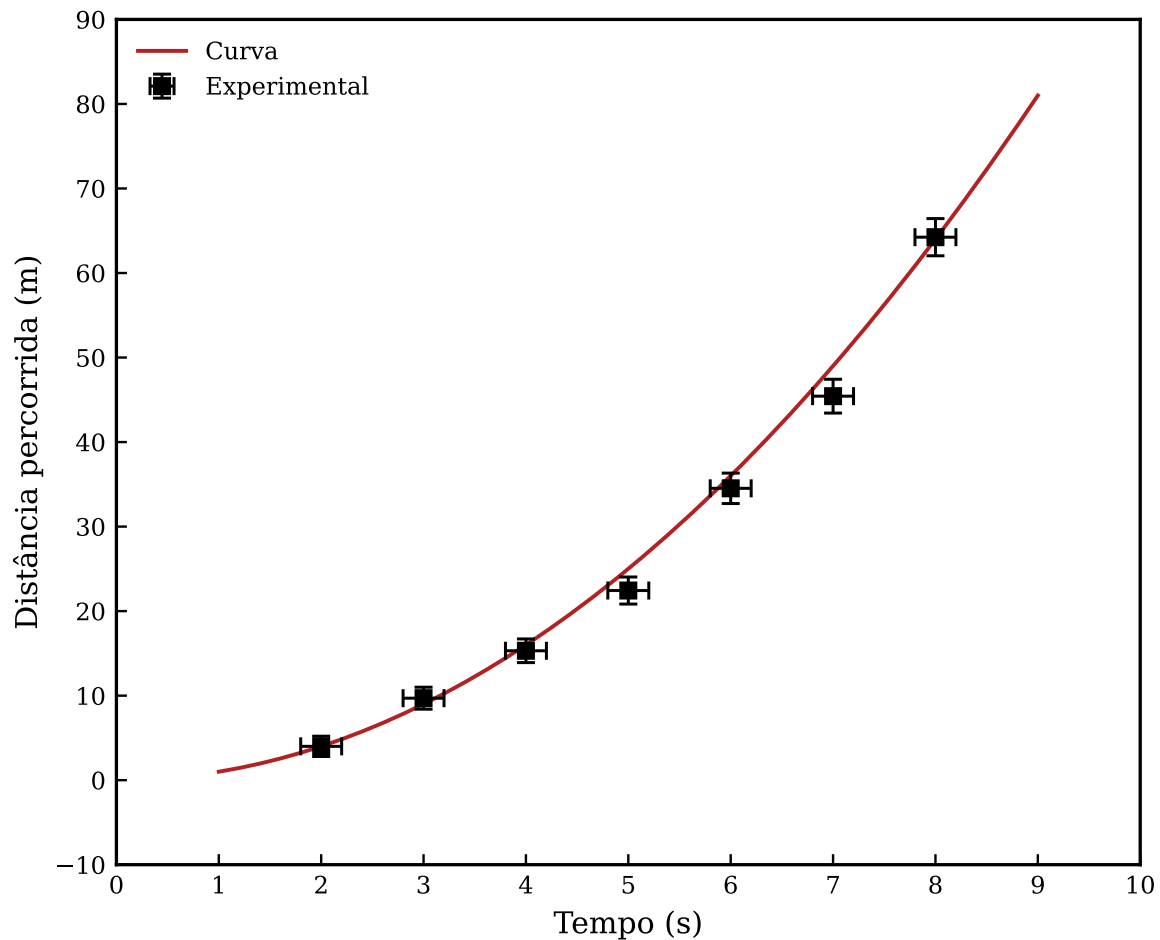


Figura 1: Distância percorrida x em função do tempo decorrido t . Os quadrados pretos correspondem aos pontos experimentais; as barras horizontais e verticais que os acompanham indicam, respectivamente, as incertezas nas medidas de t e de x . A curva vermelha representa o ajuste dos dados experimentais a uma equação quadrática, $x = at^2$, obtido pelo método dos mínimos quadrados.

Escala: valores numéricos indicados corretamente nos eixos

Um erro frequente na construção de gráficos é indicar, ao longo de um eixo com escala linear, valores numéricos que não estão igualmente espaçados. Isso não invalida a leitura dos pontos individualmente, mas pode induzir o leitor a interpretar erroneamente o comportamento da curva – por exemplo, a fazer parecer não linear uma dependência que na verdade é linear, ou a distorcer visualmente a taxa de variação da grandeza representada.

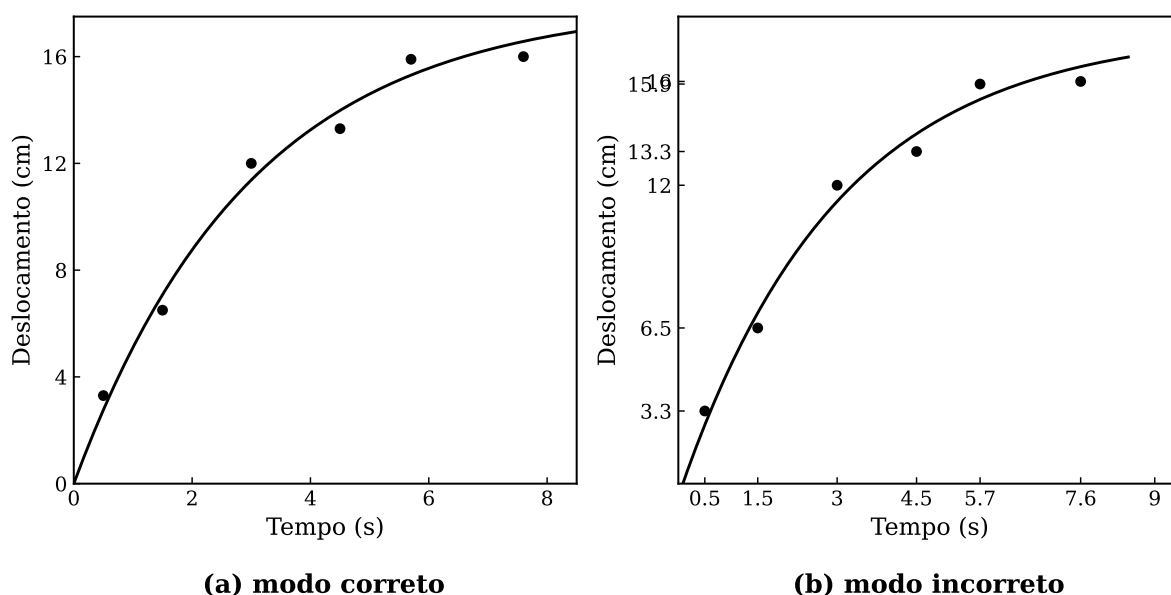


Figura 2: Mesmo conjunto de dados (deslocamento em função do tempo), mostrando o modo correto **(a)** e o modo incorreto **(b)** de indicar os valores numéricos ao longo dos eixos. Em **(a)**, os valores lançados correspondem a intervalos iguais, múltiplos da unidade escolhida. Em **(b)**, os valores lançados são as próprias abscissas e ordenadas dos pontos experimentais, conferindo ao eixo uma falsa aparência de espaçamento não uniforme – a escala, em ambos os painéis, é linear.

No modo correto, os valores numéricos lançados no eixo correspondem a intervalos iguais (múltiplos da unidade escolhida), ainda que os pontos experimentais em si não estejam igualmente espaçados. No modo incorreto, os valores numéricos são simplesmente as abscissas dos próprios pontos experimentais, lançadas sem espaçamento uniforme – o que confere ao eixo uma aparência enganosa de não linearidade da escala, quando na realidade a escala é linear.

Destacando pontos específicos

Quando for necessário chamar atenção para pontos específicos de um gráfico – por exemplo, os picos de um espectro –, esses pontos podem ser destacados com uma linha tracejada vertical até o eixo horizontal, indicando explicitamente o valor da grandeza correspondente, como no exemplo esquemático a seguir.

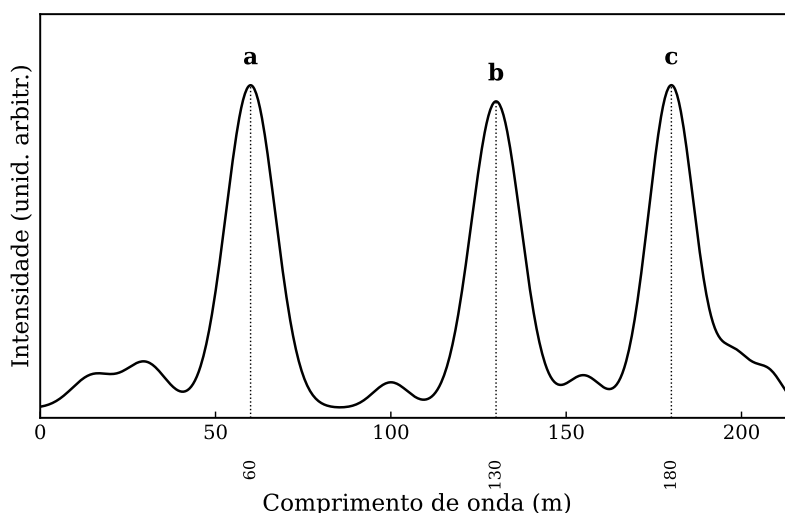


Figura 3: Espectro fictício com três picos, identificados pelas letras *a*, *b* e *c*. Cada pico é destacado por uma linha tracejada vertical até o eixo horizontal, com o valor correspondente do comprimento de onda indicado junto à base da linha. O eixo mantém sua escala regular (0, 50, 100, 150, 200); os valores destacados são uma indicação adicional, e não substituem essa escala.

Fenômenos Lineares ou Linearizáveis

Grande parte dos fenômenos naturais estudados na física introdutória apresenta uma relação de **linearidade** entre duas grandezas: $y = ax + b$, uma reta de coeficiente angular a e coeficiente linear b . Dizer que y varia linearmente com x significa que a *taxa de variação* entre as duas grandezas é constante: ao dobrar o *acrécimo* em x , o acréscimo correspondente em y também dobra; ao triplicá-lo, o acréscimo também triplica – e assim sucessivamente, em qualquer ponto do domínio. (Quando, além disso, $b = 0$, diz-se que y é **diretamente proporcional** a x : um caso particular, mais restrito, de relação linear.) Um exemplo cotidiano: o valor pago por uma corrida de táxi que cobra uma taxa fixa de embarque mais um preço por quilômetro rodado varia linearmente com a distância percorrida – cada quilômetro adicional acrescenta sempre o mesmo valor à corrida, não importa quantos já tenham sido percorridos.

Esse comportamento contrasta com o de fenômenos **não lineares**, nos quais a taxa de variação entre as grandezas não é constante. No movimento uniformemente variado, por exemplo, a posição de um corpo varia *quadraticamente* com o tempo ($x \propto t^2$): a cada intervalo de tempo igual, o acréscimo na posição é cada vez maior, ao contrário do que ocorre em uma relação linear. Reconhecer se a relação entre duas grandezas é linear ou não é, portanto, o primeiro passo antes de se tentar ajustar um gráfico a uma reta – e é exatamente isso que a construção cuidadosa de um gráfico permite verificar visualmente.

Duas grandezas físicas relacionadas linearmente, $y = ax + b$, têm no coeficiente angular $a = \Delta y / \Delta x$ a taxa de variação de y com x , e no coeficiente linear b o valor de y quando

$x = 0$. Dois exemplos ilustrativos, de naturezas distintas, aparecem a seguir:

Movimento Retilíneo Uniforme (MRU): $x = v_0 t + x_0$. Lançando a posição x em função do tempo t , o coeficiente angular fornece a velocidade v_0 e o coeficiente linear, a posição inicial x_0 .

Lei de Hooke: $F = -kx$, onde o sinal negativo indica que a força elástica se opõe à distensão (é, portanto, restauradora). Restringindo-se a uma única direção de deslocamento e tomando o módulo da força, $|F| = kx$: lançando $|F|$ em função da distensão x que a mola sofre, o coeficiente angular fornece a constante elástica k da mola; o coeficiente linear, neste caso, é nulo, já que a força se anula quando não há distensão ($x = 0$) – trata-se, portanto, de uma relação de proporcionalidade direta, e não apenas de linearidade no sentido mais amplo.

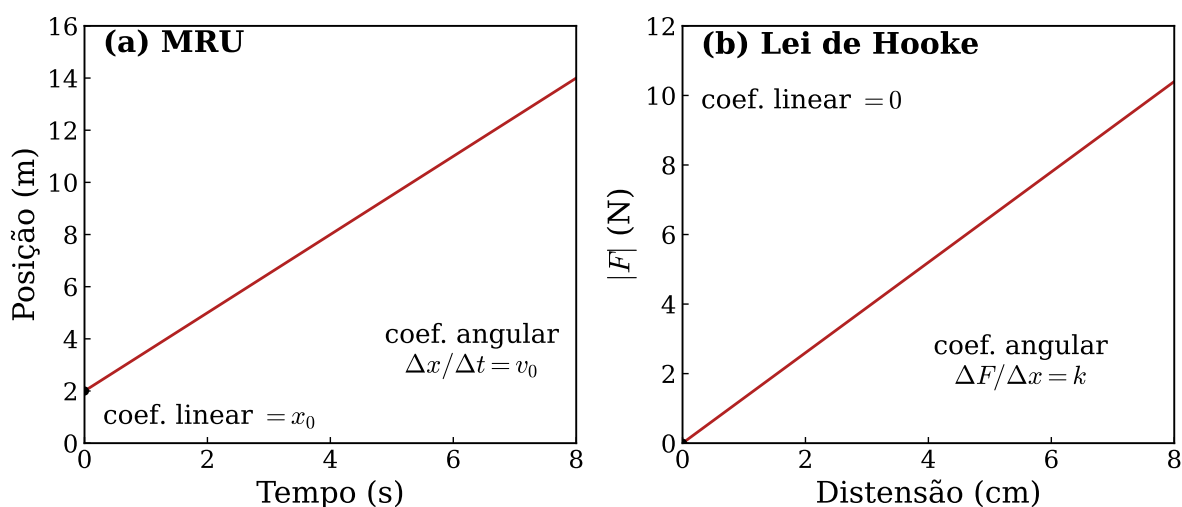


Figura 4: Dois exemplos de relações lineares em física, de naturezas distintas (dados fictícios). **(a)** Movimento Retilíneo Uniforme: a posição x varia linearmente com o tempo t ; o coeficiente linear da reta corresponde à posição inicial x_0 , e o coeficiente angular, à velocidade v_0 do corpo – uma relação linear com coeficiente linear não nulo. **(b)** Lei de Hooke: o módulo da força elástica $|F|$ varia linearmente com a distensão x de uma mola (deslocamento em uma única direção); o coeficiente angular corresponde à constante elástica k da mola, e o coeficiente linear é nulo, pois a reta passa pela origem – uma relação de proporcionalidade direta. O ponto preto, em cada painel, marca a interseção da reta com o eixo vertical, em $x = 0$ ou $t = 0$.

Método Gráfico

O tratamento gráfico de dados experimentais, como qualquer tratamento de dados, não constitui uma abordagem única. Há duas famílias de métodos para extrair os coeficientes de uma reta ajustada a um conjunto de pontos: métodos **manuais/gráficos**, em que o experimentador traça a reta e estima visualmente sua inclinação e incerteza, e métodos

algébricos/computacionais, como o método dos mínimos quadrados, em que os coeficientes vêm de expressões fechadas. Nenhuma abordagem é intrinsecamente mais “correta”: o método gráfico mantém visível, a cada etapa, o significado físico da incerteza; o algébrico oferece maior precisão e reprodutibilidade, sobretudo para conjuntos maiores.

Nesta apostila, será utilizado um **método das retas auxiliares**, descrito a seguir. Estima-se inicialmente o centro geométrico $(\bar{x}, \bar{y})$ dos pontos experimentais, e gira-se uma régua em torno desse ponto até que aproximadamente metade dos pontos de cada quadrante fique acima e metade abaixo da reta traçada – a *reta principal*. O coeficiente angular é então obtido escolhendo-se dois pontos P e Q sobre essa reta, fora da região dos dados experimentais:

$$a = \frac{Y_P - Y_Q}{X_P - X_Q} \quad (1)$$

Um erro comum: usar apenas o primeiro e o último ponto

É frequente que, após coletar cuidadosamente diversos pontos experimentais de um fenômeno linear – o que consome tempo considerável de laboratório –, o estudante calcule o coeficiente angular simplesmente a partir das coordenadas do primeiro e do último ponto medido, como se fossem P e Q . Ao fazer isso, todos os pontos intermediários são descartados: o trabalho de coletá-los foi feito, mas seu resultado não influencia em nada o valor final do coeficiente angular. Isso contraria o espírito do método: um ajuste de reta – gráfico ou algébrico – é, antes de tudo, um procedimento **estatístico**, cujo valor está em resumir *todos* os pontos coletados (por isso a reta gira em torno do centro geométrico, que já é uma média de todos os dados). Os pontos P e Q servem apenas para *ler* o coeficiente angular da reta já determinada, e devem ser escolhidos sobre ela, fora da região dos dados – nunca substituídos pelas coordenadas de dois pontos experimentais quaisquer.

A incerteza do coeficiente angular é estimada a partir das *retas auxiliares*, cuja construção parte da ideia de *caixa de incerteza* de um ponto experimental. Cada ponto medido carrega uma incerteza tanto em x quanto em y , representada pelas respectivas barras de erro (Figura 5(a)). Tomadas em conjunto, essas duas barras delimitam uma região retangular ao redor do ponto – a caixa de incerteza (Figura 5(b)). Como nenhuma medida experimental é isenta de erro, qualquer ponto no interior dessa região é, a princípio, compatível com a medida realizada – sem que isso implique que todos sejam igualmente prováveis: a barra de erro delimita uma faixa plausível de valores, não uma distribuição uniforme de probabilidade dentro dela.

Dois vértices da caixa se destacam por estarem mais afastados da reta principal, um de cada lado: o vértice *acima* dela e o *abaixo*. Esses vértices não correspondem sempre ao mesmo canto geométrico da caixa – dependem do sinal da inclinação. Na Figura 5, painel (c), a reta tem inclinação positiva e o vértice azul (acima) fica no canto superior-esquerdo, com o vermelho (abaixo) no inferior-direito; no painel (f), com inclinação negativa, a situação se inverte – o azul passa para o canto superior-direito, e o vermelho, para o inferior-esquerdo.

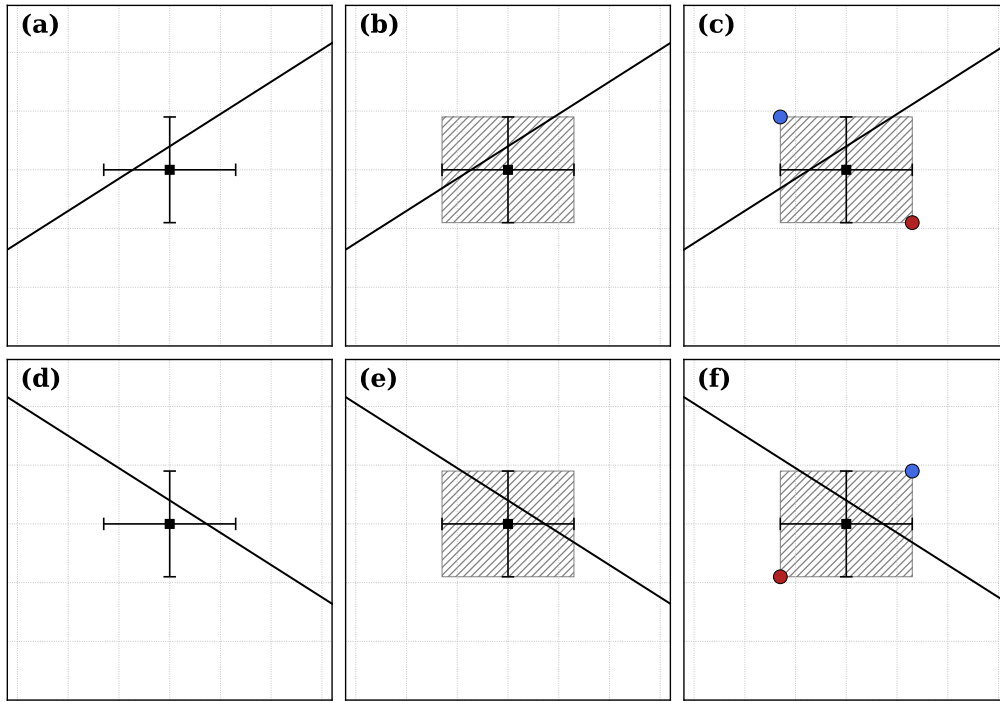


Figura 5: Caixa de incerteza de um ponto experimental, para uma reta de inclinação positiva (a–c) e negativa (d–f). (a,d) o ponto medido, suas barras de incerteza e um trecho da reta principal em sua vizinhança – não necessariamente sobre o ponto. (b,e) a região retangular delimitada pelas barras. (c,f) os vértices mais afastados da reta – em azul, o de cima; em vermelho, o de baixo. Note como o canto ocupado por cada cor se inverte entre (c) e (f).

Repetindo essa construção em *cada* ponto experimental – não só nos extremos –, obtém-se um vértice azul (acima) e um vermelho (abaixo) da reta principal em cada um. Ajustando uma reta ao conjunto de todos os vértices azuis, e outra ao conjunto de vértices vermelhos, chega-se às retas *auxiliar superior* e *auxiliar inferior*: três retas ao todo, construídas a partir de *todos* os pontos coletados, e não apenas dos dois extremos – coerente com o princípio do quadro acima. Trata-se de um método manual, executado tradicionalmente com papel milimetrado, régua e lápis; as figuras a seguir, embora geradas por computador para maior precisão gráfica, ilustram essa mesma construção passo a passo.

Como exemplo concreto, retome-se a Lei de Hooke, já apresentada na Seção como exemplo de proporcionalidade direta. A Tabela 1 reúne dados reais, obtidos por um grupo de estudantes da disciplina em um experimento com uma única mola: a distensão x e a força peso P aplicada, cada uma com sua respectiva incerteza instrumental.

Tabela 1: Distensão e força peso medidas para uma mola, com as respectivas incertezas instrumentais.

Medida	Distensão x (mm)	Força peso P (N)
1	13 ± 2	$0,20 \pm 0,03$
2	26 ± 2	$0,42 \pm 0,03$
3	39 ± 2	$0,64 \pm 0,03$
4	52 ± 2	$0,86 \pm 0,03$
5	66 ± 2	$1,10 \pm 0,03$

Passo 1 – construir as três retas e marcar os pontos extremos. Lançam-se os cinco pontos da Tabela 1 em gráfico, com suas barras de incerteza. Por eles, traça-se a reta principal (preta). Deslocando cada ponto na diagonal, para $(x - \Delta x, P + \Delta P)$, obtém-se o conjunto de vértices acima da reta principal; para $(x + \Delta x, P - \Delta P)$, o conjunto de vértices abaixo dela – a ordem entre essas construções não é obrigatória. Ajustando uma reta a cada um desses dois conjuntos, chega-se às retas-guia superior (azul) e inferior (vermelha). Marcam-se então pontos sobre as três retas na região inicial do gráfico, à esquerda dos dados, e na região final, à direita, fora da região dos pontos experimentais: A, B, C de um lado, e D, E, F do outro, indicados por estrelas na Figura 6 (o símbolo em si não é essencial ao método).

Gráfico Detalhado com Incertezas

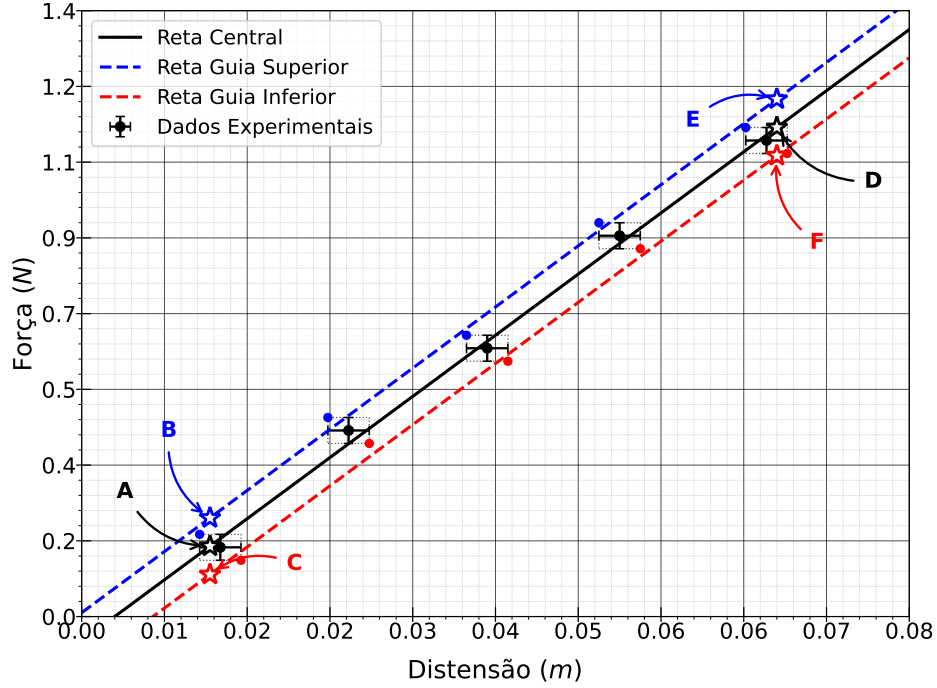


Figura 6: Dados experimentais da Tabela 1 (força peso P em função da distensão x de uma mola), com barras de incerteza, reta principal (*Reta Central*, preta) e retas-guia superior (azul) e inferior (vermelha), obtidas deslocando cada ponto na diagonal por $(-\Delta x, +\Delta P)$ e por $(+\Delta x, -\Delta P)$, respectivamente. As estrelas A, B, C e D, E, F marcam, respectivamente, a região inicial e final das três retas.

Passo 2 – calcular o coeficiente angular da reta principal. Os pontos experimentais originais não são mais necessários: as seis estrelas já contêm toda a informação relevante, agora isoladas na Figura 7. Nela, a reta preta liga A a D – os dois pontos sobre a reta principal – e fornece o coeficiente angular médio a , neste exemplo a própria constante elástica k :

$$a = \frac{Y_D - Y_A}{X_D - X_A} \quad (2)$$

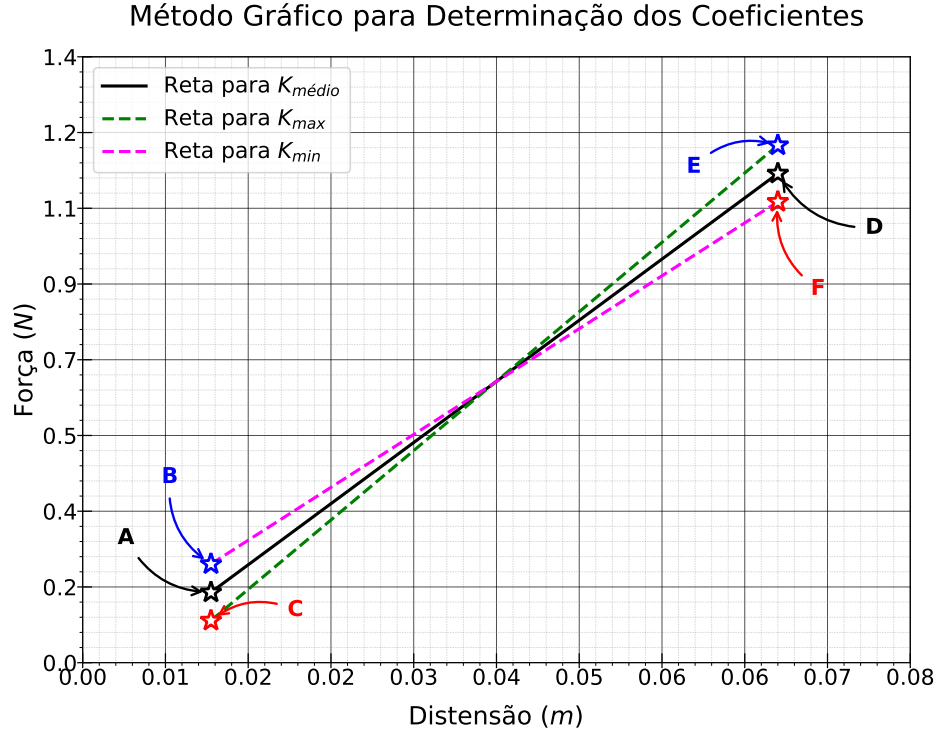


Figura 7: As seis estrelas da Figura 6 (A, B, C à esquerda; D, E, F à direita) – agora sem os dados experimentais e sem as retas originais, que não são mais necessários –, com três novas retas ligando os pares correspondentes: a preta, do ponto A ao D, fornece o coeficiente angular médio a ; a verde-tracejada, do vermelho C ao azul E, cruza a reta média e fornece a inclinação máxima, a_{max} ; a magenta-tracejada, do azul B ao vermelho F, é a de menor inclinação e fornece a_{min} .

Passo 3 – usar as estrelas restantes para estimar a incerteza. Ainda na Figura 7, a diagonal cruzada C–E (do ponto vermelho no primeiro extremo ao ponto azul no último) fornece, dentro da construção adotada, a estimativa da inclinação máxima – o coeficiente angular máximo; a diagonal oposta, B–F, fornece a estimativa da inclinação mínima:

$$a_{max} = \frac{Y_E - Y_C}{X_E - X_C} \quad a_{min} = \frac{Y_F - Y_B}{X_F - X_B} \quad (3)$$

A incerteza do coeficiente angular é a semidiferença entre esses dois valores extremos:

$$\Delta a = \frac{a_{max} - a_{min}}{2} \quad (4)$$

Nesse exemplo, o método gráfico forneceu $k = (17 \pm 2) \text{ N/m}$ – compatível com o valor central $a = 16,97 \text{ N/m}$ obtido para o mesmo conjunto de dados pelo método dos mínimos quadrados.

Quando as barras de incerteza não podem ser desenhadas

O método das retas auxiliares descrito acima pressupõe que as barras de incerteza de cada ponto sejam grandes o suficiente para serem desenhadas com clareza no gráfico. Quando as incertezas são menores do que a menor divisão da escala utilizada – e, portanto, as barras não podem ser traçadas de forma útil –, ainda é possível estimar a incerteza do coeficiente angular a partir da própria dispersão dos pontos experimentais em torno da reta principal, desde que eles não caiam todos exatamente sobre ela. O procedimento recomendado depende do número de pontos disponíveis.

Muitos pontos experimentais (aproximadamente 10 ou mais)

Com um número razoável de pontos, adota-se o método das **retas extremas aceitáveis**, descrito em diversos manuais de laboratório de física em nível universitário: traça-se a reta principal como de costume, obtendo o coeficiente angular médio a . Em seguida, sem descartar nem trocar nenhum ponto, **inclina-se essa mesma reta** – mantendo-a como uma representação ainda plausível do conjunto *inteiro* de pontos – até o limite do que pareça um ajuste razoável: a reta mais inclinada que ainda seria aceitável fornece a_{max} ; a menos inclinada, a_{min} . A incerteza é, como antes, a semidiferença entre esses dois valores extremos:

$$\Delta a = \frac{a_{max} - a_{min}}{2} \quad (5)$$

O julgamento de “o que ainda parece razoável” é necessariamente visual e um tanto subjetivo – mas, como as três retas (a , a_{max} e a_{min}) são giradas em torno da mesma nuvem de pontos, considerando-a por inteiro, o método permanece consistente com o princípio de não descartar informação coletada.

Uma forma intuitiva de pensar em a_{max} e a_{min} : cada uma pode ser entendida como se fosse, ela própria, uma *reta média* – só que de qualidade inferior, deliberadamente tendenciosa para mais ou para menos, mas ainda assim um ajuste minimamente aceitável ao conjunto de pontos. A reta principal é a melhor estimativa que se consegue fazer; a_{max} e a_{min} são as piores estimativas que ainda seriam toleráveis, uma tendenciosa para cada lado.

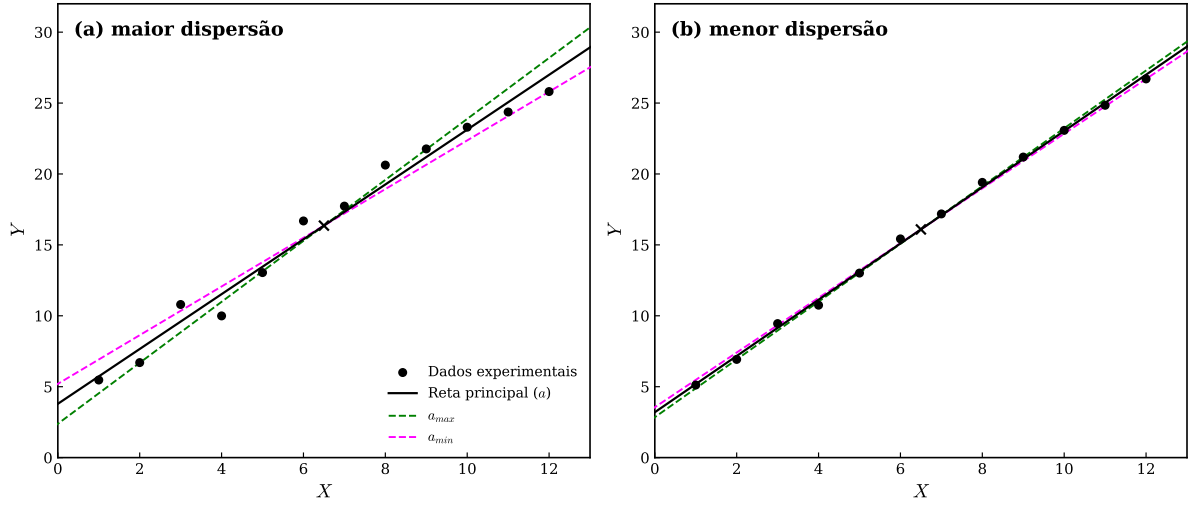


Figura 8: Método das retas extremas aceitáveis, para muitos pontos experimentais (dados fictícios), com a mesma reta geradora e os mesmos valores de x em ambos os painéis, diferindo apenas na dispersão dos dados. A reta principal (preta) e as retas extremas a_{max} (verde-tracejada) e a_{min} (magenta-tracejada) giram em torno do centroide da nuvem de pontos (marcado com um $\times$), representando o limite do que ainda pareceria um ajuste plausível para o conjunto inteiro de dados. **(a)** Maior dispersão: $a = (1,9 \pm 0,2)$. **(b)** Menor dispersão: $a = (1,98 \pm 0,05)$. A incerteza do coeficiente angular reflete diretamente a qualidade dos dados – não é um valor arbitrário.

Poucos pontos experimentais (por exemplo, até cerca de 5 ou 6)

Proposta desta apostila

Com poucos pontos, o julgamento visual do método anterior tende a ser otimista demais: poucos pontos parecem, à primeira vista, caber numa faixa estreita de retas plausíveis, mas essa impressão não é sustentada por uma amostra tão pequena – e a incerteza estimada acaba subestimada bem no caso em que ela deveria ser *maior*, não menor.

Para poucos pontos, propomos um critério mais objetivo e mais conservador: como dois pontos determinam uma reta, calcula-se o coeficiente angular de *cada par possível* de pontos experimentais. O maior desses valores é tomado como a_{max} ; o menor, como a_{min} . A incerteza é obtida pela mesma expressão, $\Delta a = (a_{max} - a_{min})/2$.

Note a diferença de papel em relação à reta principal: ali, P e Q devem ficar *fora* da região dos dados (veja o quadro “Um erro comum”, acima). Aqui, ao contrário, P e Q *são* necessariamente dois pontos experimentais – é essa a definição do método para este caso.

Vale notar que este critério funciona mesmo no limite extremo de poucos dados: com apenas três pontos experimentais já é possível obter uma reta principal e duas retas auxiliares distintas, cada uma associada a um par diferente dentre os três pares possíveis – o mínimo necessário para que o método produza a_{max} e a_{min} como valores distintos.

Esta alternativa não foi localizada, tal como formulada aqui, em nenhuma referência específica consultada; é uma proposta didática desta apostila, e não uma técnica padronizada na literatura. Isso não deve ser lido como um sinal de que a proposta é pouco confiável: toda abordagem hoje considerada padrão foi, em algum momento, proposta por alguém pela primeira vez – propor e testar novas alternativas, à medida que se tornam necessárias ou que se percebem formas de melhor bom senso, também faz parte do método científico.

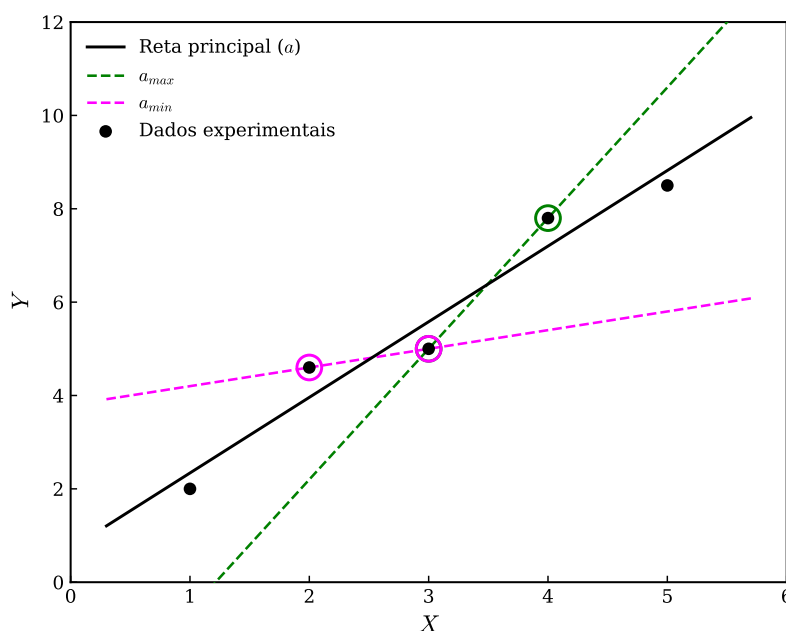


Figura 9: Método do par de pontos extremos, para poucos pontos experimentais (dados fictícios). A reta principal (preta) é obtida como de costume; a reta a_{max} (verde-tracejada) passa pelo par de pontos, entre todos os pares possíveis, de maior inclinação (pontos circulos em verde); a reta a_{min} (magenta-tracejada), pelo par de menor inclinação (pontos circulos em magenta). Note que nenhum dos dois pares extremos envolve o primeiro ou o último ponto: todos os pares devem ser considerados, não apenas os das extremidades.

Entre essas duas situações – poucos e muitos pontos –, não há um limite rígido: a transição de um critério para o outro fica a critério do professor responsável pela turma, conforme o número de pontos efetivamente coletado em cada experimento.

Linearização de Relações Não Lineares

Todos os métodos apresentados até aqui – retas auxiliares, retas extremas, par de pontos extremos – foram descritos para uma relação já linear entre as grandezas medidas. Muitos fenômenos físicos, no entanto, não são lineares em suas variáveis originais: a posição no MRUV varia com o *quadrado* do tempo; a intensidade de uma fonte radioativa decai *exponencialmente*; o período de um pêndulo varia com a *raiz quadrada* do comprimento.

Em muitos desses casos – não em todos –, é possível encontrar uma **mudança de variável** que transforma a relação original em uma relação linear: substitui-se x por x^2 , por $\log x$, por $1/x$, e assim por diante. Vale uma observação de terminologia: fala-se em mudança (ou transformação) de *variável*, não de “fator”.

Por que fazer isso manualmente

Em uma época de calculadoras científicas, planilhas eletrônicas e softwares de ajuste não linear, pode parecer desnecessário aprender a linearizar uma relação manualmente – por que não simplesmente inserir os dados originais, não lineares, em um software e obter os parâmetros ajustados diretamente? Há pelo menos três razões para não abandonar a técnica manual.

Primeiro, praticidade: uma linearização seguida de um ajuste gráfico simples fornece uma estimativa rápida dos parâmetros, sem exigir um algoritmo de ajuste não linear (que demanda tempo computacional, escolha de valores iniciais e, por vezes, softwares específicos nem sempre disponíveis no momento da coleta de dados). É útil, por exemplo, para uma verificação imediata em laboratório, antes de um tratamento mais completo.

Segundo – e mais importante –, o entendimento do fenômeno. Proceder manualmente exige reconhecer explicitamente qual transformação de variável é adequada a cada modelo físico, o que exige compreender a estrutura matemática desse modelo – não apenas aplicá-lo. Essa etapa promove um reconhecimento mais completo e verdadeiro do fenômeno estudado e das ferramentas empregadas para analisá-lo, em vez de tratá-los como uma caixa-preta.

Um risco do excesso de automação

É cada vez mais comum, em trabalhos que usam intensamente calculadoras científicas e gráficas, planilhas e softwares de tratamento de dados, que o papel do pesquisador se reduza a coletar dados, preenchê-los em uma planilha e receber, automaticamente, uma tabela de valores ajustados, unidades e incertezas – tudo gerado por um software desenvolvido por alguém (ou por uma equipe) com conhecimento profundo das técnicas de tratamento de dados envolvidas.

O problema é que esse conhecimento profundo não se transfere automaticamente para quem apenas aperta o botão. Um pesquisador que só coleta dados e recebe resultados prontos tende a ter dificuldade em explicar o significado físico e a validade de sua própria pesquisa, precisamente porque lhe falta a compreensão abrangente de como esses resultados foram efetivamente gerados. Dominar a linearização manual – mesmo sabendo que, no dia a dia, um software fará esse trabalho de forma mais rápida e precisa – é uma forma de manter essa compreensão.

Relações comuns e suas linearizações

A Tabela 2 reúne algumas relações não lineares comuns em física experimental e a mudança de variável que as torna lineares.

Tabela 2: Algumas relações não lineares e suas linearizações. Em cada caso, Y' em função de X' é uma reta, $Y' = aX' + b$, tratável pelos métodos já apresentados.

Relação original	X'	Y'	a	b
Quadrática: $y = cx^2 + d$	x^2	y	c	d
Potência (n desconhecido): $y = Ax^n$	$\log x$	$\log y$	n	$\log A$
Potência (n conhecido): $y = Ax^n$	x^n	y	A	0
Exponencial: $y = y_0 10^{\lambda x}$	x	$\log y$	λ	$\log y_0$
Logarítmica: $y = p \ln x + q$	$\ln x$	y	p	q
Inversa: $y = m/x + n$	$1/x$	y	m	n

As linhas centrais da Tabela 2 – potência e exponencial – são tratadas com mais detalhe nas duas seções seguintes, incluindo o papel gráfico específico para cada uma (di-log e mono-log, respectivamente).

Note que a relação de potência, $y = Ax^n$, admite duas linearizações distintas, conforme indicado nas duas linhas correspondentes da Tabela 2. Quando o expoente n ainda é desconhecido – e é justamente ele o parâmetro que se deseja determinar –, usa-se a forma geral por logaritmos, $X' = \log x$ e $Y' = \log y$: o próprio n passa a ser o coeficiente angular da reta linearizada. Quando, ao contrário, n já é conhecido a priori – por exemplo, ao testar um modelo específico, como $n = 2$ ou $n = 1/2$ –, é possível linearizar de forma mais direta, sem logaritmos, pela mudança de variável $X' = x^n$, $Y' = y$: obtém-se uma reta que passa pela origem, $Y' = AX'$, cujo coeficiente angular fornece diretamente a constante A . Foi exatamente essa segunda abordagem que foi empregada no exemplo a seguir: $S = S_0 + \frac{1}{2}at^2$ é um caso particular de relação de potência ($n = 2$ conhecido), linearizada por $X' = t^2$ em vez de pelos logaritmos.

Exemplo comentado: linearizando uma relação quadrática

Considere novamente o MRUV, já tratado neste documento: $S(t) = S_0 + \frac{1}{2}at^2$ (com $v_0 \approx 0$). A Tabela 3 mostra dados fictícios de posição em função do tempo – não lineares, como evidencia a Figura 10(a).

Tabela 3: Dados fictícios de posição em função do tempo, para o exemplo de linearização de uma relação quadrática.

t (s)	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
S (cm)	3,0	7,5	12,0	19,0	29,3	36,3

Fazendo a mudança de variável $X' = t^2$, com $Y' = S$ (conforme a Tabela 2), obtém-se a Tabela 4, cujo gráfico – Figura 10(b) – já é uma reta, tratável pelo método das retas auxiliares ou pelo método dos mínimos quadrados.

Tabela 4: Os mesmos dados da Tabela 3, linearizados: $X' = t^2$, $Y' = S$.

t^2 (s ²)	0,25	1,00	2,25	4,00	6,25	9,00
S (cm)	3,0	7,5	12,0	19,0	29,3	36,3

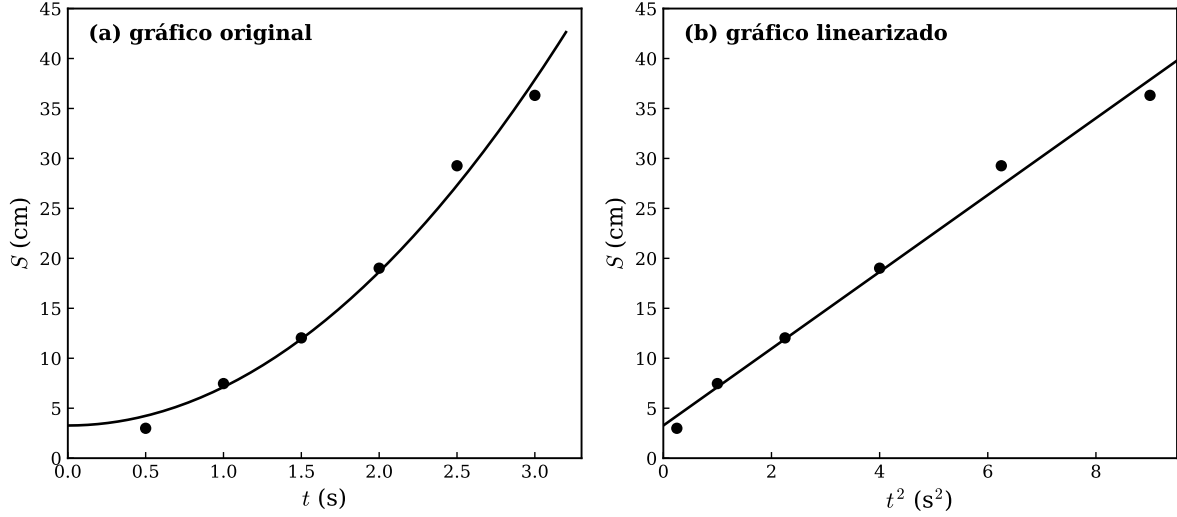


Figura 10: Linearização de uma relação quadrática. **(a)** Gráfico original, S em função de t : uma parábola. **(b)** Mesmos dados, gráfico linearizado, S em função de t^2 : uma reta. O coeficiente angular da reta em (b) fornece $a/2$; para estes dados fictícios, o ajuste resulta em $S_0 \approx 3,3$ cm e $a \approx 7,7$ cm/s².

Uma vez linearizados os dados, o restante do tratamento – reta principal, incerteza do coeficiente angular, comparação com o valor teórico – segue exatamente como já apresentado para qualquer outra relação linear: a linearização é apenas o passo que torna esse tratamento aplicável.

Gráficos em Papel Mono-Log

O método das retas auxiliares, como apresentado, permite determinar diretamente os parâmetros de uma reta $Y = aX + b$ em papel de escala linear (como o milimetrado). Quando a relação entre as grandezas não é linear, mas exponencial – $Y = Y_0 10^{\lambda X}$ –, o mesmo tipo de análise gráfica pode ser aplicado após a mudança de variável $Y' = \log Y$ (Tabela 2):

$$\log(Y) = \log(Y_0) + \lambda X, \quad (6)$$

uma relação linear entre $\log(Y)$ e X , com coeficiente angular λ e coeficiente linear $\log(Y_0)$. O **papel mono-log** é construído de modo que a escala do eixo vertical já represente Y

diretamente, mas com espaçamento proporcional a $\log(Y)$ – de forma que uma relação exponencial em Y apareça como uma reta no papel, sem que o experimentador precise calcular manualmente o logaritmo de cada ponto antes de lançá-lo no gráfico.

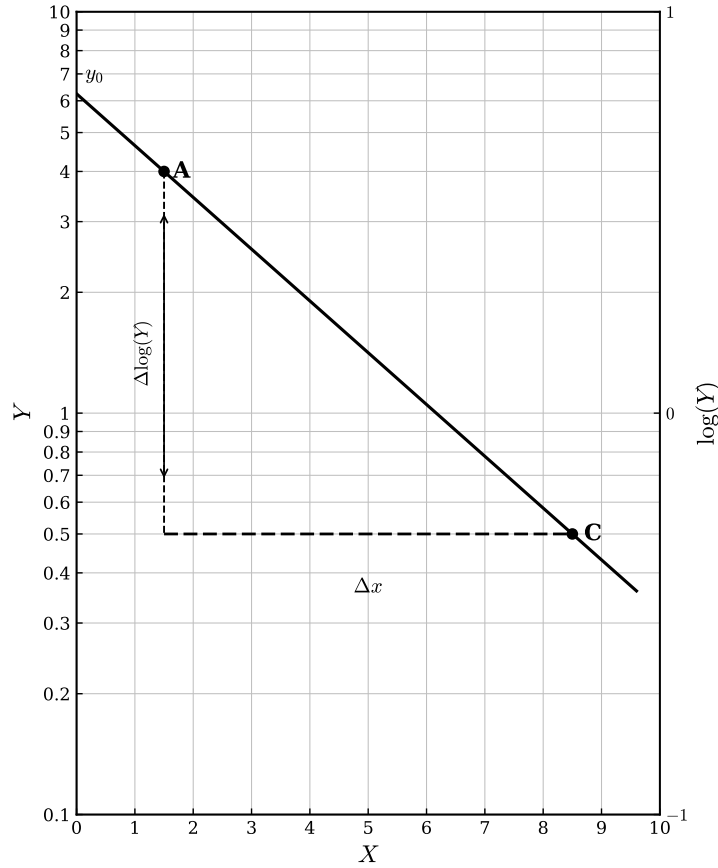


Figura 11: Gráfico em papel mono-log: o eixo vertical (esquerda) usa escala logarítmica, com todas as linhas de grade numeradas – não apenas as décadas –, reproduzindo o papel utilizado manualmente em laboratório; o eixo auxiliar (direita), em escala linear, mostra $\log(Y)$ diretamente, apenas para evidenciar a relação entre as duas leituras. Os pontos A e C são usados para obter o coeficiente angular λ : o segmento tracejado horizontal corresponde a $\Delta x = x_C - x_A$, e o vertical, a $\Delta \log(Y) = \log(y_C) - \log(y_A)$; a razão entre os dois fornece λ . Neste exemplo, $y_0 \approx 6,2$ e $\lambda \approx -0,13$.

Note que a escala vertical do papel mono-log nunca atinge o valor zero – $\log(Y)$ diverge quando $Y \rightarrow 0$. O coeficiente angular λ é obtido de forma análoga ao caso linear, escolhendo dois pontos A e C sobre a reta:

$$\lambda = \frac{\log(Y_C) - \log(Y_A)}{X_C - X_A} \quad (7)$$

com a diferença de que o comprimento do cateto vertical do triângulo usado para o cálculo representa a diferença entre dois logaritmos, e não a diferença direta entre dois valores lidos na escala Y . A incerteza $\Delta\lambda$ é estimada seguindo o mesmo procedimento das

retas auxiliares descrito na seção anterior, substituindo os valores de Y pelos respectivos logaritmos na construção das retas auxiliares.

Vale destacar que o papel mono-log não é uma técnica *à parte* das já apresentadas: sua escala vertical apenas realiza, de forma mecânica e visual, a mesma mudança de variável $Y' = \log Y$ que se poderia calcular ponto a ponto e lançar em papel comum. As duas abordagens produzem exatamente a mesma reta, o mesmo λ e a mesma incerteza – a diferença é só de conveniência: o papel mono-log evita calcular manualmente o logaritmo de cada ponto (uma vantagem mais relevante na época da régua de cálculo e das tábuas de logaritmo do que hoje, com calculadoras). Essa mesma linearização – tomar o logaritmo de uma relação exponencial para reduzi-la a uma reta – é também a base do que a apostila trata, de forma computacional, na seção de *Ajustes Não Lineares* pelo método dos mínimos quadrados: o papel mono-log é a versão manual e gráfica do mesmo princípio.

Gráficos em Papel Di-Log (Log-Log)

O papel mono-log lineariza relações *exponenciais*. Um tipo diferente de relação não linear, também muito comum em física, é a **relação de potência**, $Y = AX^n$, em que a variável independente aparece elevada a um expoente n a ser determinado – não a relação em si dentro de um expoente, como no caso exponencial. Tomando o logaritmo de ambos os lados,

$$\log Y = \log A + n \log X, \quad (8)$$

obtém-se uma relação linear entre $\log Y$ e $\log X$ (Tabela 2), com coeficiente angular n e coeficiente linear $\log A$. Como agora *ambas* as variáveis precisam ser transformadas por um logaritmo, o papel apropriado tem **as duas escalas** logarítmicas – o **papel di-log** (também chamado log-log).

Como exemplo, considere o período T de um pêndulo simples em função do seu comprimento L : $T = 2\pi\sqrt{L/g} = 2\pi g^{-1/2} L^{1/2}$, uma relação de potência com $n = 1/2$. A Figura 12 mostra dados fictícios de T em função de L , lançados em papel di-log.

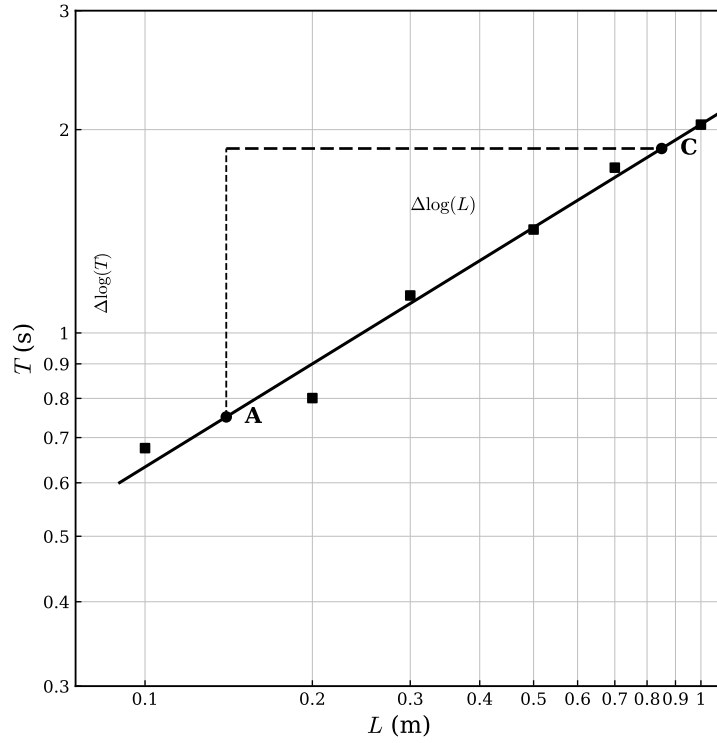


Figura 12: Gráfico em papel di-log (log-log): ambos os eixos usam escala logarítmica, com todas as linhas de grade numeradas, reproduzindo o papel utilizado manualmente em laboratório. Os quadrados são os dados fictícios (período T de um pêndulo simples em função do comprimento L); os pontos A e C , sobre a reta ajustada, são usados para obter o expoente n – a razão entre $\Delta \log(T)$ (segmento vertical tracejado) e $\Delta \log(L)$ (segmento horizontal tracejado) fornece n . Para estes dados, o ajuste resulta em $n \approx 0,51$, compatível com o valor teórico $n = 1/2$.

O expoente n é obtido de forma análoga aos casos anteriores, escolhendo dois pontos A e C sobre a reta ajustada:

$$n = \frac{\log(Y_C) - \log(Y_A)}{\log(X_C) - \log(X_A)} \quad (9)$$

com a incerteza Δn estimada pelo mesmo procedimento das retas auxiliares, agora aplicado aos logaritmos de *ambas* as grandezas. Tal como o papel mono-log, o papel di-log não é uma técnica à parte: é a versão manual e gráfica de tomar $\log Y$ e $\log X$ e tratar o resultado como uma reta comum – exatamente o que a Tabela 2 já indicava para uma relação de potência.