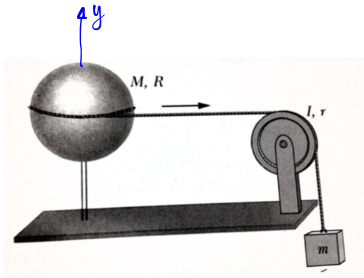
Questão 1) [3,3] Uma casca esférica uniforme de massa $M = 4,5$ kg e raio $R = 6,5$ cm pode girar em torno de um eixo vertical sem atrito (Veja Fig. ao lado). Uma corda de massa desprezível passa em torno do equador da casca, por uma polia de momento de inércia $I = 3,0 \times 10^{-3}$ kg.m^2 e raio $r = 5,0$ cm, e está presa a um pequeno objeto de massa $m = 0,6$ kg. Não há atrito no eixo da polia e a corda não escorrega em sua borda. Qual a velocidade angular ($\vec{\omega}$) da casca após o objeto m cair 82cm, tendo sido abandonado do repouso?
Obs: Defina eixos referiais de sua escolha e explicite sua resposta vetorialmente.



Dados:

$$I_{casca} = \frac{2}{3} M R^2$$

$$I_{disco} = \frac{M R^2}{2}$$

"*Em torno de um eixo que pessa pelo centro.*"

Solução) Minha escolha é tratar o problema no sentido de obter as intensidades envolvidas. No final apresentarei a solução em notação vetorial.

Por simplicidade vou considerar um sistema com m_1^*, m_2^* e m_3 acoplado, como realizado em aula.

$m_1^* = \frac{I_{casca}}{R^2}$ $\Rightarrow$ massa aparente da casca; com $I_1 = \frac{2}{3} M R^2$

$\Rightarrow m_1^* = \frac{2}{3} M$

$m_2^* = \frac{I_{polia}}{r^2}$ $\Rightarrow$ massa aparente da polia, com $I_{polia} = 3,0 \times 10^{-3}$ kg m^2

$\Rightarrow m_2^* = \frac{3,0 \times 10^{-3}}{r^2}$ kg

$m_3 = 0,6$ kg.

$\Rightarrow$ $\boxed{m_1^*}\boxed{m_2^*}\boxed{m_3} \longrightarrow P = m_3 g$ "única força atuando no sistema acoplado"

$\Rightarrow \sum F = m a$

$$m_3 g = (m_1^* + m_2^* + m_3) . a$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{m_3 g}{\left(\frac{I_{casca}}{R^2} + \frac{I_{polia}}{r^2} + m_3 \right)}$$

$$a = \frac{0{,}6 \cdot 10}{\left(\frac{2}{3}M + \frac{0{,}0030}{r^2} + 0{,}6 \right)} = \frac{6}{\left(\frac{2 \cdot 4{,}5}{3} + \frac{0{,}0030}{0{,}050^2} + 0{,}6 \right)}$$

$\boxed{a = 1{,}25 \, m/s^2}$; o sistema todo se movimenta no sentido óbvio, com esta aceleração linear.

⇒ A borda da casca apresenta esta aceleração linear, portanto:

a velocidade linear após cair 0,82m é:

$$v^2 = \cancel{v_0^2}^{\text{zero}} + 2a\Delta y$$

$$v = \sqrt{2a\Delta y} = \sqrt{2 \cdot 1{,}25 \cdot 0{,}82}$$

$$v \simeq 1{,}43 \, m/s$$

Esta é a velocidade linear de todo o sistema - incluindo a borda da casca - Portanto:

$$v = wR$$

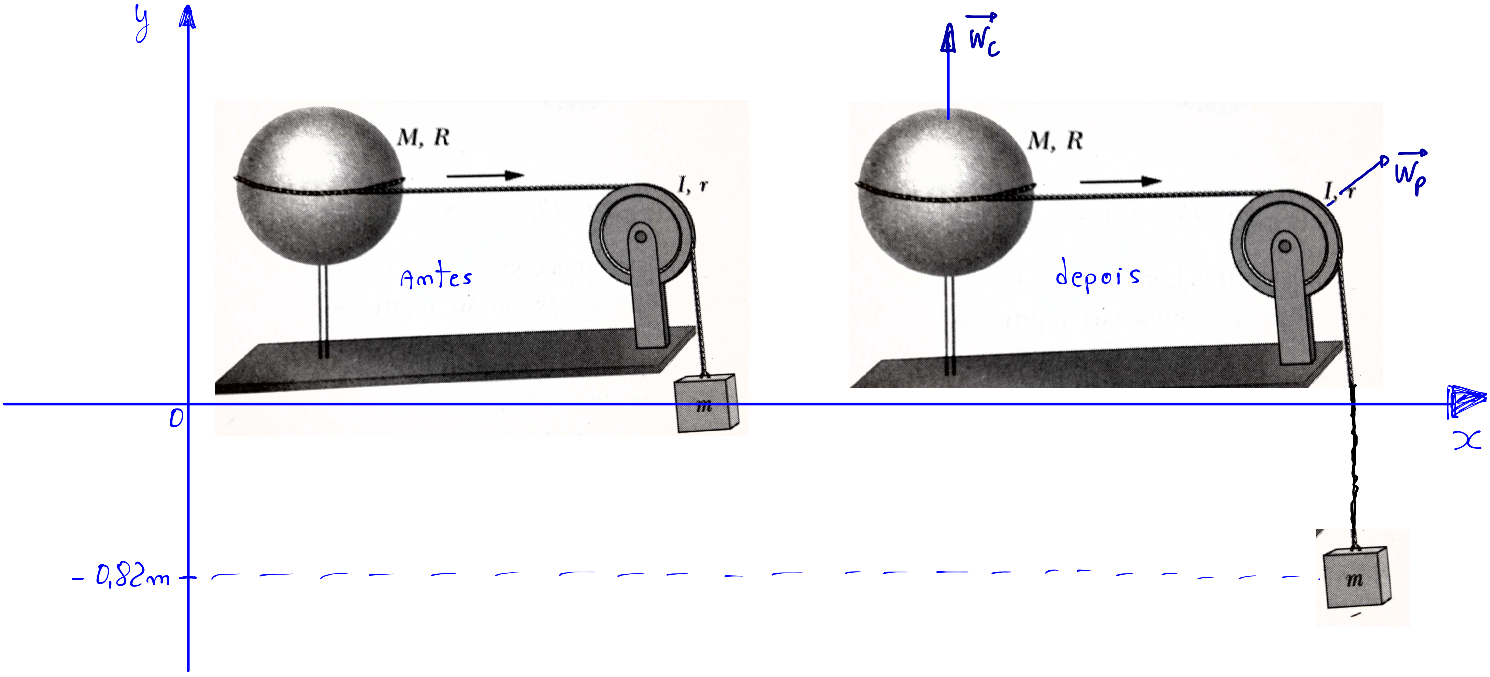
$$w = \frac{v}{R} \cong \frac{1{,}43}{0{,}065} \simeq 22{,}0 \, rad/s$$

Assumindo o eixo y no sentido do topo da folha e aplicando a convenção da mão direita:

$$\boxed{\vec{w} \cong 22{,}0 \, rad/s \; \hat{j}}$$

Solução por conservação de energia:

$E_{Antes} = E_{depois}$ ⇒ Definir um referencial para as energias potenciais e cinéticas envolvidas.



O bloco $\underline{m}$ cai perdendo energia potencial $\underline{mg\Delta y}$. Esta energia potencial perdida é transformada em energias cinéticas de rotação da casca e da polia mais a energia cinética de translação do bloco m.

$$\Rightarrow \underbrace{mgh}_{0{,}82\,m} = \underbrace{\frac{1}{2} I_c W_c^2}_{\text{Rotação da casca}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_p W_p^2}_{\text{Rotação da polia}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\text{translação (linear) do bloco}}$$

$\underline{v}$ é comum a todos ⇒ velocidade nas bordas.

Para a casca ⇒ $W_c R = v$; Para a polia ⇒ $W_p r = v$

$$mgh = \frac{1}{2} I_c \frac{v^2}{R^2} + \frac{1}{2} I_p \frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2} m v^2 \quad ; \text{ com } I_c = \frac{2}{3} M_c R^2$$

$$\text{e} \quad I_p = \frac{M_p r^2}{2}$$

$$mgh = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}M_c \cancel{R^2}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{R^2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{M_P \cancel{r^2}}{2}\right)\frac{1}{\cancel{r^2}} + \frac{m}{2}\right]v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{mgh}{\frac{M_c}{3} + \frac{M_P}{4} + \frac{m}{2}}}$$

Obs: $\underbrace{I_P}_{\text{dado}} = \dfrac{M_P r^2}{2}$

$\Rightarrow M_P = \dfrac{2 \times I_P}{r^2} = \dfrac{2 \times 0{,}003}{0{,}05^2}$

$M_P = 2{,}4\ kg$

Valores: $v = \sqrt{\dfrac{0{,}6 \times 10 \times 0{,}82}{\frac{4{,}5}{3} + \frac{2{,}4}{4} + \frac{0{,}6}{2}}}$

$v \cong 1{,}43\ m/s$

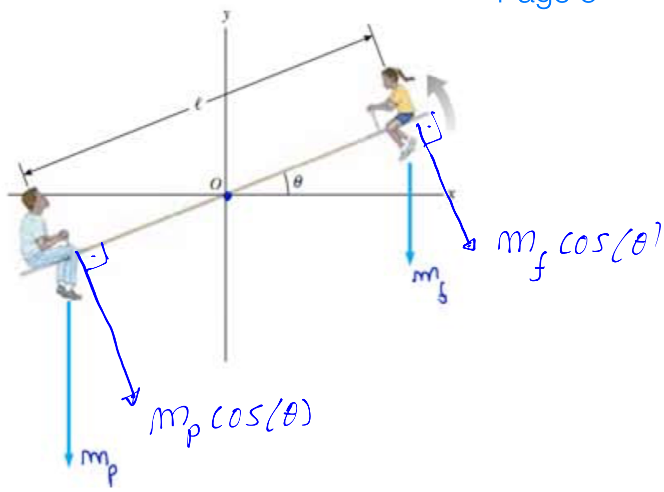
Para a casca $\Longrightarrow$ $w_c R = v$

$$w_c = \frac{v}{R} = \frac{1{,}43}{0{,}065}\ m/s$$

$$\vec{w_c} \simeq 22{,}0\ rad/s\ \hat{j}.$$

Questão 2) [3,3] Um pai de massa $\mathbf{m}_p$ e sua filha de massa $\mathbf{m}_f$ brincam sentados nas extremidades de uma gangorra sem atrito e de comprimento l, como representado na Fig. ao lado. Para um dado ângulo θ, determine a aceleração angular do sistema quando nem o pai e nem a filha tocam os pés no chão.

Dados: $I_{barra} = \frac{Ml^2}{12}$



Tudo o que "temos" de fazer é obter o torque total (τ) e o momento de inércia total (I_{total}) e, então relacioná-los através de

$$\tau = I\alpha$$

$$\alpha = \frac{\tau_{total}}{I_{total}}$$

$$I_{total} = I_{barra} + I_{pai} + I_{filha}$$ "relativos ao eixo de giro".

$$I_{total} = \frac{Ml^2}{12} + m_p\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_f\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \left(\frac{M}{12} + \frac{m_p}{4} + \frac{m_f}{4}\right)l^2$$

Torque:

$$\tau_{total} = P_p \cos(\theta)\frac{l}{2} - P_f \cos(\theta)\frac{l}{2}$$

$$\tau_{total} = (m_p - m_f)\, g \cos(\theta)\frac{l}{2}$$

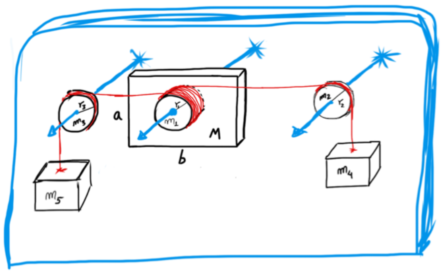
"sinais representam os sentidos dos torques".

$$\Rightarrow \alpha = \frac{(m_p - m_f)\cos(\theta)\, g\, l}{\left(\frac{M}{12} + \frac{m_p + m_f}{4}\right) 2}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{12(m_p - m_f)\cos(\theta)\, g\, l}{2(M + 3m_p + 3m_f)}\hat{k}$$

"Assumindo $\hat{z}$ saindo do plano da folha".

Questão 3) [3,4] Considere que o sistema mostrado na Fig. ao lado esteja sob a influência gravitacional da terra com g=10m/s^2. **(a)** Obtenha a aceleração linear do sistema; **(b)** Obtenha a aceleração angular do sistema central (sistema composto por um disco de massa $\mathbf{m}_1$ e raio $\mathbf{r}_1$, acoplado a um retângulo de massa **M** e lados **a** e **b**. Dica: Utilizando o acoplamenro das cinco pessas (como explicado em aula) e usando as massas de rotacao $m^* = I/r^2$, a solução se torna bastante simples.



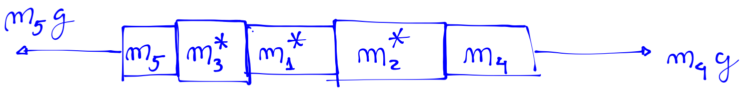
Dados:

$$I_{\text{placa retangular}} = \frac{M(a^2+b^2)}{12}$$

$$I_{disco} = \frac{MR^2}{2}$$

"Em torno de eixos que pessam pelos centros."

(a) Utilizando procedimento análogo ao da questão 1.



$$\rightarrow m_4 g - m_5 g = \left(m_5 + \frac{I_3}{r_3^2} + \frac{I_1}{r_1^2} + \frac{I_2}{r_2^2} + m_4 \right) \cdot a$$

$$\rightarrow a = \frac{(m_4 - m_5)\, g}{m_5 + \frac{I_3}{r_3^2} + \frac{I_1}{r_1^2} + \frac{I_2}{r_2^2} + m_4}$$

Mas: $I_3 = \dfrac{m_3 r_3^2}{2}$ "referente à polia da esquerda."

$I_1 = \dfrac{m_1 r_1^2}{2} + \dfrac{M(a^2+b^2)}{12}$ "Polia central, onde devem ser considerados o cubo e o retângulo".

$I_2 = \dfrac{m_2 r_2^2}{2}$

$$\rightarrow \boxed{a = \frac{(m_4 - m_5)\, g}{m_5 + \frac{m_3}{2} + \frac{m_1}{2} + \frac{M}{12}\frac{(a^2+b^2)}{r_1^2} + \frac{m_2}{2} + m_4}}$$

(b) A aceleração linear obtida acima é comum a todas as bordas por onde passa a linha.

$\Rightarrow$ Na peça central $\multimap$ $a = \alpha\, r_1$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{a}{r_1}$$

ou
$$\boxed{\alpha = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{(m_4 - m_5)\, g}{\left(m_5 + \frac{m_3}{2} + \frac{m_1}{2} + \frac{M}{12}\frac{(a^2+b^2)}{r_1^2} + \frac{m_2}{2} + m_4 \right)}}$$

Para uma resposta vetorial, basta definir-se eixos convenientes e expressar-se com referência a estes.