★ Medidas e erros de uma grandeza física.

Os diversos fenômenos naturais são estudados, atualmente, através do acompanhamento de valores numéricos que atribuem intensidades aos mesmos.

Ex: Massa de um corpo = 80Kg
- Unidade de medida
- Valor numérico que nos possibilita relacionar a intensidade de massa deste corpo com outros corpos.

Como está claro no exemplo, a intensidade (80) está acompanhada de uma sigla (Kg). Isto é sempre necessário pois qualquer quantidade só faz sentido quando puder ser comparada com outra.

No caso de M = 80Kg estamos comparando a intensidade do corpo medido com a intensidade de um padrão unitário pré-definido e chamado de 1Kg.

Analogamente, se medirmos o comprimento de um objeto e obtivermos 100 de intensidade, então o número 100 só terá sentido quando colocado em comparação com sua unidade padrão associada.

Contudo, uma mesma grandeza física possui, em geral, mais de uma unidade padrão associada:

Ex: Comprimento = 100 ?

? = metro (m)

ou ? = centimetro (cm)

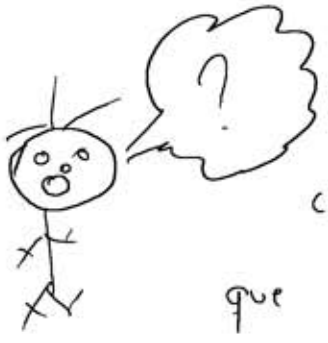
ou ? = milimetro (mm) , etc...

Então, meus queridos alunos, nunca expressem uma grandeza física com um número desacompanhado de sua unidade de referência padrão, pois simplesmente um número não faz sentido por si próprio (fisicamente falando).

—//—

✡ Como uma medida física pode ser realizada?

Simplesmente comparando o objeto de nossa medida com os padrões pré-definidos. (padrões porque uma única intensidade pode estar associada com mais de um padrão; Ex: velocidade ⇒ metro e segundo (m/s).).



Mas como comparar uma medida de comprimento se o padrão é uma placa que está guardada em um cofre na suíça? (acho).

Cópias desse padrão são retiradas e distribuídas pelo mundo (as réguas, por exemplo). Então utiliza mos as cópias ou instrumentos que fornecem uma comparação com o padrão conhecido (balança, por exemplo).

Vamos realizar uma medida de comprimento e ver o que acontece.

1º) Vamos definir o nosso padrão como sendo a linha espessa abaixo:

= 1 moscom → padrão é meu, o nome é meu.

2º) Vamor fabricar um dispositivo (régua) baseada no nosso padrão:

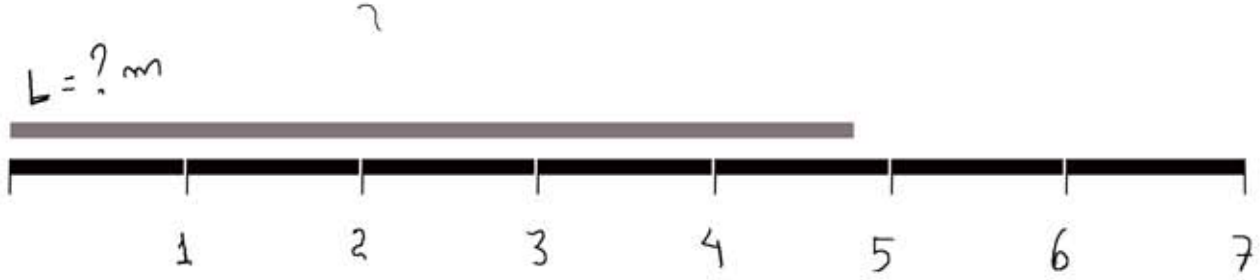
" Construímos um medidor composto por 7 moscoms^.

3º) Vamos definir um objeto a ser medido, a barra sinza abaixo:

4º) Finalmente é só comparar o objeto com a régua. e teremos uma intensidade com a qual podemos trabalhar e/ou divulgar esta informação sem a

necessidade da presença do objeto.

Vejamos:



O que acham?

Quantos <u>moscons</u> mede a barra exatamente?

⇨ Exatamente é possível dizer?

⟹ Claramente não temos como determinar a medida com 100% de certeza, ao invés disso somos capazes de estimar um valor aproximado

Eu diria que é mais de 4,5 m e menos que 4,9 m. Nesse faixa podemos errar em ≈ 0,4 m.

⇨ Então digo que $L = (4,7 \pm 0,2)\ m$

- $4,7$ → Valor aproximado
- $0,2$ → Erro estimado visualmente

Como utilizamos a percepção visual para estimar o erro, então o erro não é único, depende também da capacidade visual do observador.

"Então diferentes observadores poderão estimar erros diferentes"

"Qual o erro que um observ. cego estimaria?".

"Claro, mão por isso vamos inserir erros de qualquer tamanho, exigiremos coerência, pois queremos resultados utilizáveis, ou seja, um observador cego não está apto para este tipo de medida".

—II—

Observe que podemos construir uma unidade de medida bem menor (digamos 1 moscon dividido em cem pedaços iguais); construimos uma nova regua com maior número de marcações (centimoscada).
Fazendo isso, a extremidade direita (do objeto medido) vais estar entre duas divisões e o erro necessariamente será menor que 1 cm.

⇨ Portanto, o erro (em uma única medida) é sempre menor que a divisão unitária do equipamento de medida.

Em geral, por mais preciso que seja um instrumento de medida, nunca será 100% preciso e um erro deverá ser considerado.

Podemos classificar o erro comentado acima como erro de escala do instrumento de medida.

Contudo, existem outras fontes de erro que estão associadas com outros fatores.

Ex: Se fizermos a mesma medida acima dentro de um carro em movimento sobre uma estrada irregular, então as vibrações podem alterar, com o tempo, a posição da extremidade da barra, bem como a percepção do observador, e esses novos fatorer devem ser considerados.

A seguir classificaremos os tipos de erros.

Tipos de erros em uma medida.

1) Erro instrumental.

Erro associado à precisão do instrumento de medida

"Já comentado mas páginas anteriores"

2) Erros sistemáticos.

Os ***Erros Sistemáticos*** são provocados por fontes associadas a instrumentação ou ao método de medida utilizado, e, em princípio, podem ser eliminados ou compensados. Esses erros fazem com que as medidas estejam sistematicamente acima ou abaixo do valor verdadeiro. Como exemplo de erros sistemáticos, pode-se citar a utilização de uma régua graduada numa temperatura de $30^{\circ}C$, mas que foi calibrada a $20^{\circ}C$. A dilatação de sua escala resultará num erro sistemático em todas as medidas.

3) Erros Grosseiros.

Os ***Erros Grosseiros*** ocorrem devido a imperícia ou distração do operador. Como exemplos pode ser citados, uma escolha errada de escalas, erros de cálculo, etc.. Esses erros podem ser reduzidos por meio da repetição cuidadosa das medições.

4) Erros aleatórios (ou acidentais).

Os ***Erros acidentais*** ocorrem devido a causas diversas e imprevisíveis difíceis de serem eliminadas. Esses erros podem ter várias origens, tais como em relação aos próprios ***instrumentos de medida***, onde pequenas flutuações das condições ambientais (temperatura, pressão, umidade, etc) afetam os resultados experimentais. Em fatores associados ao ***operador*** sujeitos a variações, como por exemplo a visão e a audição.

—"—

Algarismos Significativos

Como vimos no exemplo da régua definida em termos da unidade moscom (m), não temos 100% de precisão na medida; mas temos precisão múltipla de unidades de moscoms, pois essa foi a menor divisão no instrumento de medida. Em geral, trabalha-se com a precisão do instrumento e adiciona-se mais um algarismo que é definido por estimativa intuitiva.

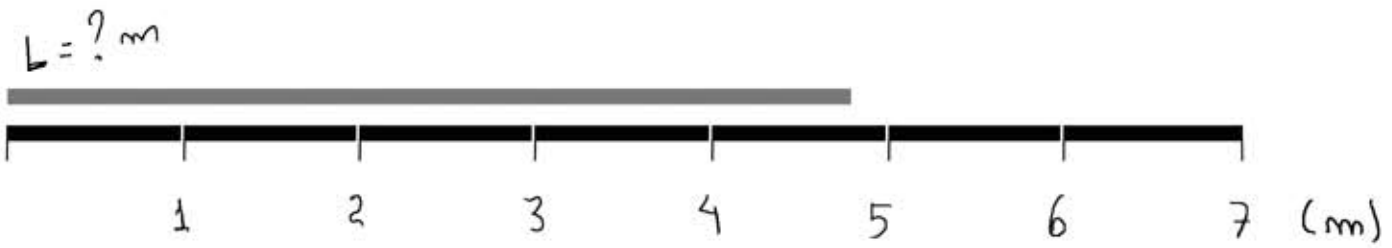
No caso, dissemos que $L \cong 4,7\ m$

- 4,7 → Lido no instrumento
- m → Estimado visualmente.

O detalhe que precisa ser entendido é que não faz sentido tentarmos "enxergar" mais de uma subdivisão dentro da divisão mínima do instrumento.

Dizemos que só tem significado uma estimativa dentro da escala mínima. Demais subdivisões não têm significado e por isso não são (obviamente) algarismos significativos.

Exemplo:



- Precisão em unidades de m, portanto L = 4 m
  └ significativo.

- É possível afirmar que a extremidade direita está mais próxima de 5 que de 4. Então tem significado se inserirmos mais um algarismo para representar este fato:

  ⇨ L ≅ 4,7 m
  └ Significativo
  └ significativo.

- Inserir qualquer subdivisão abaixo dos décimos de m. (além de 0,7m) é "forçar a barra".

Tipo assim:

L ≅ 4,78 m
└ Não tem significado

Em resumo, os algarismos significativos abrangem a menor escala do instrumento de medida mais uma subdivisão.

Pergunta: Como ficaria a soma de dois comprimentos medidos com instrumentos de diferentes precisões?

⇨ Digamos que L_1 é o comprimento medido em uma régua com precisão de unidades de metro, tal que $L_1 \equiv 4,7\,m$. Adicionalmente L_2 foi medido em uma régua mais precisa, com divisões em $\frac{1}{10}\,m$, ou seja, decimetrada; tal que $L_2 = 7,38\,m$.

Como ficaria a soma $L = L_1 + L_2$

Observe que 0,08 é significativo para a régua decimetrada, mas não é para a régua metrada.

Uma soma "despreocupada" (direta) daria:

$L = 4,7 + 7,38 = 12,08\,m$ ⟷ Massss ↘

Observe que 12,08 pode ser obtido somando-se

$4 + 7$, $0,7 + 0,3$, $? + 0,08$

$11 + 1,0 + ?$

$12,0 + ?$

↳ O algarismo avaliado na regua decimetrada entra em uma soma sem sentido, portanto perde (parcialmente)

o significado.

* Porque parcialmente?

Não se pode afirmar um valor na casa dos centímetros (0,0x), mas podemos usar 0,08 para definir uma tendência. Como 0,08 está mais próximo de 0,1 do que de 0,0 então:

$\underbrace{4+7}_{11}$, $\underbrace{0,7+0,3}_{1,0}$, $\underbrace{?+0,08}_{?}$

$11 + 1,0 + ?$

$12,0 + ?$ → arredondamos para 0,1

E a soma final é $\boxed{L \cong 12,1\ m}$

Observe que o resultado final possui precisão de unidades de metro (12 unidades) + um algarismo estimado; ou seja, a precisão de uma operação matemática é limitada à menor precisão associada ao instrumento menos preciso utilizado.

O mesmo procedimento é aplicado a qualquer que seja a grandeza medida e/ou instrumento utilizado.

Vimos que em uma medida é necessário introduzirmos informações a cerca da precisão instrumento(s) utilizado(s).

Em medidas sensíveis à fatores externos (significativamente), além dos erros diretos em cada medida pode ocorrer alterações no valor medido devido à esses fatores externos (temperatura, pressa, cachaça etc..).

Nestes casos imprega-se uma abordagem estatística.

Em resumo, todas as informações retiradas do experimento são anotadas com o objetivo de encontrarmos valores médios ou valores que aparecem com maior frequência.

Nota: Valor medio ≠ (em geral) Valor mais frequente

Essa abordagem produz um conjunto de dados cujos valores oscilam em torno de uma região. Sendo assim, definimos características, associadas ao experimento, que sejam utilizáveis como resultado final do experimento.

Quais características seriam úteis em uma situação como esta?

1) Dispersão dos dados obtidos.
   "Se estão muito ou pouco espalhados em relação a um valor médio, por exemplo".

2) Valor médio dos dados obtidos.

3) " mais frequente entre os obtidos.

4) Desvios em relação ao valor médio

5) Média dos desvios em relação ao valor médio

6) etc.. "O que mais considerarmos como informação relevante".

⇨ A seguir vamos desenvolver ferramentas matemáticas capazes de nos fornecer, a partir de uma população de dados, as características listadas acima.

★ Vamos começar pelo valor médio associado a um conjunto de n medidas de uma grandeza x qualquer.

Denotemos por x_i a i-ésima medida, tal que:

medida	1	2	3	...	i	...	$n-1$	n
valor medido	x_1	x_2	x_3	...	x_i	...	$x_{(n-1)}$	x_n

Valor médio de x ($\langle x \rangle$) é dado por:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \cdot \sum_i x_i$$

★ Uma outra informação relevante associada a um conjunto de dados $\{x_i\}$ é o espalhamento dos valores obtidos, relativamente ao valor médio. Vamos chamar de sigma este espalhamento (σ).

Em princípio, poderíamos desenvolver vários mecanismos matemáticos capazes de retornas algum número que seja tão maior quanto maior for o espalhamento

Exemplo:

Uma soma de todas as distâncias (de cada ponto medido) em relação ao valor médio.

Eq.(1) $\Rightarrow \sigma = \sum_i |x_i - \langle x \rangle|$

Obs: [Espalhamento é comumente denotado por desvio] → Mais comum nos livros.

Obs: "É importante utilizarmos o módulo pois queremos apenas distâncias. Sem o módulo a soma tende a ser zero pois em medidas aleatórias o percentual abaixo de $\langle x \rangle$ é igual ao acima.

Obviamente, quanto maior o espalhamento dos pontos x_i, relativamente a $\langle x \rangle$, maior será o valor de σ.

Pergunta: Existiria uma forma matemática melhor que a Eq. (1) capaz de nos dar um parâmetro para o espalhamento?

Resposta: Bom, em geral os melhores valores associados a um conjunto de medidas são os valores médios. Portanto, uma média das distâncias seria mais adequada, logo:

$$\sigma' = \frac{\sum_i |x_i - \langle x \rangle|}{m} \qquad \text{Eq. (2)}$$

Esta forma é utilizada e não a primeira. É denotada por:

DESVIO MÉDIO

Existe uma outra forma matemática, muito utilizada, que nos fornece informação análoga. É dada por:

$$\sigma'' = \frac{\sum_i (x_i - \langle x \rangle)^2}{n}$$, que trata-se de uma média do quadrado das distâncias. O quadrado é inserido com a finalidade de abandonar-se a notação modular.

Seria adequado que σ'' tivesse mesma dimensão de $\underline{x}$. por esse motivo é inserido (sem demonstrações, é inserido por definição mesmo) a raiz quadrada no lado direito, resultando em:

$$\sigma'' = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \langle x \rangle)^2}{n}} \qquad \text{Eq. (4)}$$

Esta expressão é conhecida pelo nome de DESVIO PADRÃO. É utilizada quando $\underline{n}$ é suficientemente grande.

"Lembre que estamos procurando uma forma matemática que nos dê informação sobre a dispersão de nossos dados experimentais"

Sendo assim, a equação (4) carrega uma inconsistência quando utilizada para $\underline{n}$ pequeno.

Exemplo: Qual seria a dispersão associada a um experimento com uma única medida ($n = 1$)?

Resposta:

No caso de uma única medida, o valor medido (x_1) é igual ao valor médio $\langle x \rangle$

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_1 x_i}{n} = \frac{x_1}{1} = x_1 \quad ; \quad \langle x \rangle = x_1$$

Para a dispersão (ou desvio padrão) temos:

$$\sigma'' = \sqrt{\frac{\sum_1 (x_i - \langle x \rangle)^2}{n}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \langle x \rangle)^2}{1}}$$ que dá zero

pois $x_1 = \langle x \rangle$.

$\Rightarrow \sigma'' = 0$

Masssss... que sentido faz falarmos em dispersão experimental associada a uma única medida? Não se pode dizer nada a respeito da dispersão com uma única medida. A equação disse que a dispersão do experimento é zero, mas certamente se novas medidas forem realizadas, valores diferentes de x_i serão encontrados e a dispersão será $\neq$ zero.
Portanto a Eq. (4) é inconsistente.

Como resolver este fato?

Resposta:

A dispersão de um experimento com uma única medida deve ser indeterminada, ou seja dizer que nada pode ser dito com respeito à dispersão. Matematicamente a indeterminação está associada a uma expressão incapaz de retornar um valor específico (geralmente uma expressão com zero no denominador.

A solução é introduzir, na equação (4), um fator que explicite o fato discutido acima. Algo que torne σ indeterminado quando $n = 1$. Isso se dá com $(n-1)$ no denominador.

Assim, reescrevemos o desvio padrão como:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i (x_i - \langle x \rangle)^2}{(n-1)} \qquad \text{Eq. (5)}$$

(DESVIO PADRÃO)

Observe que se $n = 1$ (x_1), temos:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \langle x \rangle)^2}{0} = \frac{0}{0} = \text{indeterminado}.$$

Observe também que se n é grande (neste caso é comum considerar $n \geq 10$ já é grande) então $n >> 1$ e a expressão (5) pode ser escrita como a Eq. (4)

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i (x_i - \langle x \rangle)^2}{n}.$$

Pra finalizar, vamos introduzir uma outra característica que deveria aparecer quando $n \longrightarrow \infty$.

A expressão 5 nos dá uma ideia acerca de o quão espalhados estão os pontos experimentais em torno do valor médio, e deve utilizada quando o interesse for este.

Agora queremos uma expressão que retrate a confiabilidade que devemos ter no valor médio $\langle x \rangle$. Obviamente, quanto maior for o número de pontos experimentais mais confiável é o valor de $\langle x \rangle$.

Algo do tipo: Se o número n é muito grande, então $\langle x \rangle$ é muito confiável e podemos assumir um erro menor para nosso experimento.

É comum utilizar-se o valor de σ'' como sendo o erro associado ao valor de $\langle x \rangle$.

Queremos então que $\sigma'' \longrightarrow$ zero se $n \longrightarrow \infty$, pois nesta situação a medida é cada vez mais confiável.

$\sigma''^2 = \dfrac{\sum_i (x_i - \langle x \rangle)^2}{(n-1)}$ não possui esta característica.

Vejamos: Se $n \longrightarrow \infty \Longrightarrow \sigma''^2 = \dfrac{\sum_i (x_i - \langle x \rangle)^2}{n}$

pois $n \gg 1$.

$$\sigma''^2 = \frac{\sum_i \left[x_i^2 - 2x_i\langle x\rangle + \langle x\rangle^2 \right]}{m}$$

$$\sigma''^2 = \underbrace{\frac{\sum_i x_i^2}{m}}_{1º} - \underbrace{\frac{\sum_i 2x_i\langle x\rangle}{m}}_{2º} + \underbrace{\frac{\sum_i \langle x\rangle^2}{m}}_{3º}$$

1º termo = $\langle x^2 \rangle$

2º termo = $2\langle x\rangle \frac{\sum_i x_i}{m} = 2\langle x\rangle^2$

3º termo = $\frac{\langle x\rangle^2}{m} \sum_i 1 = \frac{\langle x\rangle^2}{m} \cdot m = \langle x\rangle^2$

$$\Rightarrow \sigma''^2 = \langle x^2\rangle - 2\langle x\rangle^2 + \langle x\rangle^2$$

$$\sigma'' = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

Desta forma, como os valores médios não se alteram com o aumento de m, concluímos que

σ'' = constante e independe de m.

Como queremos um novo σ''' que tenda a zero quando $m \to \infty$, vamos definí-lo como segue:

$$\sigma'''^2 = \frac{\sigma''^2}{m} \Rightarrow \boxed{\sigma'''^2 = \frac{\sum_i (x_i - \langle x\rangle)^2 / (m-1)}{m}}$$

$$\sigma'^{2} = \frac{\sum_i (x_i - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}$$

$$\Rightarrow \sigma' = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}}$$

σ' é denotado como a média do desvio padrão ou desvio padrão médio.

Obs: $\sigma''^{2} = \frac{\sigma'^{2}}{n}$; para n grande vimos que $\sigma'' = cte$ constante.

Logo: $\lim_{n\to\infty} (\sigma''^{2}) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sigma'^{2}}{n}\right) = cte \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = zero.$

—//—

Em resumo

Estatisticamente trabalha-se com:

1) Valor médio de $\{x_i\}$, dado por $\langle x \rangle = \frac{\sum_i x_i}{n}$

2) Desvio médio no conjunto $\{x_i\}$, dado por:

$$D_m = \frac{\sum_i |x_i - \langle x \rangle|}{n}$$

"Fiz $\sigma \equiv D_m$"

"Notação mais comum"

3) Desvio padrão dado por:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i (x_i - \langle x \rangle)^2}{(n-1)}$$

"Fiz $\sigma' \equiv \sigma$"

"mais comum"

4) Desvio padrão médio dado por:

$$\sigma_m^2 = \frac{\sum_i (x_i - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}$$

"Fiz $\sigma'' \equiv \sigma_m$"

"é mais comum"

Pra que servem estas expressões?

1) Valor médio $\langle x \rangle$ nos dá um valor que é considerado como melhor valor a ser utilizado para representar o conjunto de dados $\{x_i\}$.

2) Desvio médio $\underline{D_m}$ nos dá um parâmetro adequado que expressa o quão disperso está o conjunto de dados $\{x_i\}$ em relação ao valor médio.

3) Desvio padrão nos dá a mesma informação que o desvio médio. Contudo, em geral, o desvio padrão retorna valores menores que o desvio médio. Para poucos pontos experimentais o desvio médio pode ser mais adequado. É uma escolha pessoal.

4) Desvio padrão médio: Nos dá um padrão de confiabilidade no valor médio. Quanto menor σ_m, mais confiável é $\langle x \rangle$. É comum utilizarmos o desvio padrão médio (σ_m) como sendo o erro estatístico associado ao valor assumido $\langle x \rangle$.

Exemplo:

Suponha que fizemos n medidas de uma grandeza x.
No fim do experimento alguém pergunta: Qual o valor de x?

Uma boa resposta seria:

$$x = \langle x \rangle \pm \sigma_m$$

σ_m → Erro cometido, normalmente denotado por Δx.

$\langle x \rangle$ → Valor mais coerente a ser atribuído para x.

FIM

— II —
— II —

PROPAGAÇÃO DE ERROS: