Exemplo:

Suponha que fizemos $\underline{m}$ medidas de uma grandeza $\underline{x}$.

No fim do experimento alguém pergunta: Qual o valor de x?

Uma boa resposta seria:

$$x = \langle x \rangle \pm \sigma_m$$

σ_m → Erro cometido, normalmente denotado por Δx.

$\langle x \rangle$ → Valor mais coerente a ser atribuído para x.

FIM

— || —

PROPAGAÇÃO DE ERROS:

É comum que valores experimentais sejam obtidos de forma indireta, após a correlação de valores experimentais obtidos de forma direta.

Exemplo: Velocidade de uma paratícula:

$$V = \frac{S}{t}$$

S → espaço

t → tempo gasto para percorrê-lo.

Medimos $\underline{S}$ e suas incertezas $\underline{\Delta S}$, diretamente.

Medimos $\underline{t}$ " " " $\underline{\Delta t}$, " .

Calculamos V " " " $\underline{\Delta V}$, indiretamente.

"Mas como calcular ΔV em função de ΔS e Δt?"

"Com certeza $\Delta V \neq \frac{\Delta S}{\Delta t}$" Ex: $\left[\begin{array}{l} \text{se } \Delta t \approx 0\,s \text{ e } \Delta S \approx 2\,s \\ \Delta V \approx \infty \text{ ? } \quad \text{"não é"} \end{array}\right]$

Antes de inserirmos uma forma mais geral para a propagação de erros (na verdade, de incertezas), vamos colocar um caso particular a fim de nos perguntarmos: Como poderíamos considerar o erro em uma expressão que correlaciona diferentes grandezas, cada uma com seu próprio erro?

Exemplo:

Vamos obter a velocidade $\underline{v}$ em função das medidas experimentais do espaço $\underline{S}$, com erro $\underline{\Delta S}$; e do tempo $\underline{t}$ com seu erro $\underline{\Delta t}$.

Obs: ΔS e Δt, aqui, são os erros cometidos nas medidas de $\underline{S}$ e $\underline{t}$.

* Como $v = \dfrac{S}{t}$, qual seria a incerteza $\Delta v(\Delta S, \Delta t)$?

Resposta: * Variação de $\underline{v}$ com relação à variações em $\underline{S}$ seria

$$\Delta v_S = \frac{\partial v}{\partial S}\Delta S$$

"Aproximação de primeira ordem"
"Série de taylor"

* Variação de $\underline{v}$ com relação à variável $\underline{t}$:

$$\Delta v_t = \frac{\partial v}{\partial t}\Delta t$$

Uma primeira intuição nos levaria a concluir que a variação total Δv seria a soma de $\Delta v_S + \Delta v_t$

$$\rightarrow \Delta v = \frac{\partial v}{\partial S}\Delta S + \frac{\partial v}{\partial t}\Delta t$$

"isto não está correto ... pq?"

observe, por exemplo, que se $\dfrac{\partial v}{\partial S} < 0$ e $\dfrac{\partial v}{\partial t} > 0$, então pode ser que $\Delta v = 0$. O que não pode ser, afinal, erros não se anulam, se propagam, ou seja, não é possível duas incertezas nos relevar uma certeza ....

Neste ponto de vista, $\underline{\Delta V}$ deve ser assumido como sendo os valores máximos que ΔV_s e ΔV_t podem proporcional, logo:

$$\Delta V = |\Delta V_s| + |\Delta V_t|$$

$$\Delta V = \left|\frac{\partial V}{\partial s}\right| \Delta s + \left|\frac{\partial V}{\partial t}\right| \Delta t$$

Bom candidato à incerteza propagada.

$\underline{\Delta s}$ e $\underline{\Delta t}$ não estão dentro do módulo pois já são definidos como valores positivos (aulas anteriores).

—ıı—

Generalizando esta abordagem temos, para uma função qualquer $f(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_m)$, que sua incerteza pode ser calculada por:

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \Delta x_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \Delta x_2 + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \Delta x_i + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_m}\right| \Delta x_m$$

Inserindo a notação somatória:

$$\boxed{\Delta f = \sum_{i=1}^{m} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \Delta x_i}$$

Aplicando em formas matemáticas específicas.

1) Soma ou subtração:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - x_3$$

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \Delta x_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \Delta x_2 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_3}\right| \Delta x_3$$

$$\Delta f = |1| \Delta x_1 + |1| \Delta x_2 + |-1| \Delta x_3 = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3$$

$$\Rightarrow f \pm \Delta f = (x_1 + x_2 - x_3) \pm (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3) \quad //$$

2) Multiplicação:

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1 \cdot (-x_2) \cdot x_3$$

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \Delta x_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \Delta x_2 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_3}\right| \Delta x_3$$

$$\Delta f = |-x_2 . x_3| \Delta x_1 + |-x_1 x_3| \Delta x_2 + |-x_1 x_2| \Delta x_3$$

$$\Delta f = |x_2 . x_3| \, \Delta x_1 . \frac{|x_1|}{|x_1|} + |x_1 x_3| \Delta x_2 \frac{|x_2|}{|x_2|} + |x_1 x_2| \Delta x_3 \frac{|x_3|}{|x_3|}$$

$$\Delta f = |x_1 . x_2 . x_3| \left\{ \left|\frac{\Delta x_1}{x_1}\right| + \left|\frac{\Delta x_2}{x_2}\right| + \left|\frac{\Delta x_3}{x_3}\right| \right\}$$

$$\Rightarrow f \pm \Delta f = -x_1 . x_2 . x_3 \pm |x_1 . x_2 . x_3| \left\{ \left|\frac{\Delta x_1}{x_1}\right| + \left|\frac{\Delta x_2}{x_2}\right| + \left|\frac{\Delta x_3}{x_3}\right| \right\}$$

Obeserve que o módulo no coeficiente da incerteza é desnecessário devido à estar multiplicado por ± 1. Sendo assim, podemos escrever a forma final, para multiplicação, como:

$$f \pm \Delta f = -x_1 . x_2 . x_3 \pm x_1 . x_2 . x_3 . \left\{ \left|\frac{\Delta x_1}{x_1}\right| + \left|\frac{\Delta x_2}{x_2}\right| + \left|\frac{\Delta x_3}{x_3}\right| \right\}$$

ou:

$$\boxed{f \pm \Delta f = f \pm f . \left\{ \sum_i \left|\frac{\Delta x_i}{x_i}\right| \right\}}$$

Obs: Divisões e expoentes são casos particulares da multiplicação:

Exemplo:

$$f = \frac{a}{b^2} \Rightarrow f = a . b^{-2} = a . b^{-1} . b^{-1}$$

$$\Rightarrow \Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right| \Delta b + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right| \Delta b = |b^{-2}| . \Delta a + 2 . |a b^{-1} . (-1) . b^{-2}| \Delta b$$

$$\Delta f = \left|\frac{1}{b^2}\right| \Delta a + 2 . \left|\frac{a}{b^3}\right| \Delta b$$

"multiplicando e dividindo por $\frac{a}{}$ e $\frac{b}{}$

$$\Delta f = \left|\frac{1}{b^2}\right| \Delta a \cdot \left|\frac{a}{a}\right| + 2 \cdot \left|\frac{a}{b^3}\right| \Delta b \cdot \left|\frac{b}{b}\right|$$

$$\Delta f = \left|\frac{a}{b^2}\right| \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + 2 \cdot \left|\frac{a}{b^2}\right| \cdot \left|\frac{\Delta b}{b}\right|$$

$$\Delta f = \left|\frac{a}{b^2}\right| \left\{ \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right| \right\}$$

$$f \pm \Delta f = \frac{a}{b^2} \pm \frac{a}{b^2} \left\{ \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + 2 \cdot \left|\frac{\Delta b}{b}\right| \right\} \Rightarrow$$

Observe que o expoente de $\underline{b}$, (2), aparece como fator multiplicador na soma das incertezas dentro das chaves.

Enfim. De uma forma mais geral use:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots x_n) \pm \Delta f = \underbrace{f \pm \sum_i \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \Delta x_i} \qquad \text{(Forma 1)}$$

—||—

Abordagem 2 // Abordagem estatística para obtenção do valor médio de f e também sua variância (proporcional ao desvio padrão). σ_f^2.

"Porquê 2ª ordem": Uma função $f(x)$, por exemplo, pode ser aproximada por uma expansão em série de taylor, como segue:

Expansão em série de taylor em torno de um ponto $\underline{x_0}$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Obs: Quanto mais termos se utiliza, mais próximo se chega do valor verdadeiro de $f(x)$.

- Uma aproximação de 1ª ordem seria somar até $n=1$:

$$f(x) \cong f(x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0)$$

- 2ª ordem até $n=2$

$$f(x) \cong f(x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0)^2$$

- e daí por diante.

Observe a expansão de 1ª ordem:

$$f(x) = f(x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0)$$

$$\Delta f(x) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} \cdot \Delta x$$

, que é exatamente o que utilizamos para obter a propagação do erro na primeira forma.

— // —

Se considerarmos até a 2ª ordem, temos:

$$\Delta f(x) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (x - x_0)^2$$

Logo:

$$\begin{cases} \text{1ª ordem} & \Delta f(x) \approx \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} (x - x_0) \\ \text{2ª ordem} & \Delta f(x) \approx \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} (x - x_0) + \dfrac{1}{2} \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0} \cdot (x - x_0)^2 \end{cases}$$

Lembrando:

- Valor esperado em um conjunto $\{X\}$ é dado por

$E\{X\} = \langle x \rangle$, média.

- Variância de $\{X\}$ é dado por:

$$Var\{X\} = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$$

$$= \langle (x^2 - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2) \rangle$$

$$= \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle^2 + \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

Define-se variância $Var\{X\}$ como σ^2 "simplificar a notação".

Reescrevendo a expansão de 2ª ordem de uma forma mais explícita temos:

"fazendo $x_0 = \langle x \rangle$:"

$$f(x) = f(\langle x \rangle) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\langle x \rangle} \cdot (x - \langle x \rangle) + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\langle x \rangle} \cdot (x - \langle x \rangle)^2 \quad *$$

Calculando o valor esperado de $f(x)$:

$$E(f(x)) = \langle f(\langle x \rangle) \rangle + \left\langle \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\langle x \rangle} \cdot (x - \langle x \rangle) \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\langle x \rangle} \cdot (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle$$

$$E(f(x)) = f(\langle x \rangle) + \underbrace{\left\langle \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\langle x \rangle} \right\rangle \cdot [\langle x \rangle - \langle x \rangle]}_{\text{zero}} + \frac{1}{2} \left\langle \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\langle x \rangle} \right\rangle \cdot \underbrace{\langle [x - \langle x \rangle]^2 \rangle}_{\sigma^2}$$

$$E(f(x)) = f(\langle x \rangle) + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\langle x \rangle}}_{} \cdot \sigma^2$$

$(\langle f''(\langle x \rangle) \rangle = f''(\langle x \rangle)) \rightarrow$ média de uma função aplicada no valor médio é ela própria

Então o valor mais esperado de $f(x)$ é

$$E(f(x)) = f(\langle x \rangle) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_{\langle x \rangle} \cdot \sigma^2$$

— // —

Vamos agora aplicar a variância em $f(x)$.

$$f(x) = f(\langle x \rangle) + \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{\langle x \rangle} \cdot (x - \langle x \rangle) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_{\langle x \rangle} \cdot (x - \langle x \rangle)^2$$

$$Var\{f(x)\} = \left\langle f(\langle x \rangle)^2 \right\rangle - \left\langle f(\langle x \rangle) \right\rangle^2 \qquad \text{Linha (1)}$$

$$+ \left\langle \left[\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{\langle x \rangle} \cdot (x - \langle x \rangle) \right]^2 \right\rangle - \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{\langle x \rangle} \cdot (x - \langle x \rangle) \right\rangle^2 \qquad \text{" (2)}$$

$$+ \left\langle \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_{\langle x \rangle} \cdot (x - \langle x \rangle)^2 \right]^2 \right\rangle - \left\langle \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_{\langle x \rangle} \cdot (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle^2 \qquad \text{" (3)}$$

Linha (1) dá zero, pois trata-se de médias de valores médios

logo: $f(\langle x \rangle)^2 - f(\langle x \rangle)^2 = \text{zero}$.

Linha (2): o segundo termo dá zero, pois:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{\langle x \rangle} \cdot (x - \langle x \rangle) \right\rangle^2 = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{\langle x \rangle} \cdot (\langle x \rangle - \langle x \rangle) \right]^2 = \text{zero}.$$

Linha (3): Os dois termos não são zero, mas são iguais devido aos quadrados. Sendo assim, quando da subtração eles zeram. (confira).

Em resumo, só resta o termo: $\left\langle \left[\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\langle x \rangle} \cdot (x - \langle x \rangle) \right]^2 \right\rangle$

$$Var\{f(x)\} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\langle x \rangle} \right]^2 \cdot \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$$

$$Var\{f(x)\} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\langle x \rangle} \right)^2 \cdot \sigma_x^2$$

$$\Rightarrow \sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\langle x \rangle} \right)^2 \cdot \sigma_x^2$$

Repetindo o procedimento para uma função de duas variáveis $f(x_1, x_2)$, chega-se em:

$$E\{f(x)\} = f[\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle] + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\Big|_{\mu} \right] \frac{\sigma_1^2}{2} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\Big|_{\mu} \right] \cdot \frac{\sigma_2^2}{2} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\Big|_{\mu} \right] \cdot \sigma_{12}$$

sendo: $\mu = (\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle)$ e $\sigma_{12} = \langle (x_1 - \langle x_1 \rangle)(x_2 - \langle x_2 \rangle) \rangle$.

Observe que o último termo será zero se as variáveis $\underline{x_1}$ e $\underline{x_2}$ não forem correlacionadas.

Para a Variância temos:

$$Var(f(x_1, x_2)) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\mu} \right]^2 \cdot \sigma_1^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_{\mu} \right]^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\mu} \right] \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_{\mu} \right] \sigma_{12}$$

De novo, o termo contendo σ_{12} zera se $\underline{x_1}$ e $\underline{x_2}$ não são variáveis interdependentes, ou seja, correlacionadas.

De uma forma geral, para $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, temos:

"Para variáveis não correlacionadas"

$$E\{f\} \cong f(\langle x_1\rangle, \langle x_2\rangle, \ldots, \langle x_n\rangle) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right|_{\langle x_i\rangle} \cdot \sigma_i^2$$

e $Var\{f\}$, que é dada por σ_f^2:

$$\sigma_f^2 \cong \sum_{i=1}^{n} \left[\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\langle x_i\rangle}\right]^2 \sigma_i^2$$

Em resumo, se $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é obtida indiretamente através de valores x_i (estatisticamente), então devemos atribuir para f seu valor mais esperado $E\{f\}$, mais o intervalo de confiança dado por σ_f

$$f = E\{f\} \pm \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\langle x_i\rangle}\right]^2 \cdot \sigma_i^2}$$

Lembrando que $\sigma_i^2 = \langle x_i^2\rangle - \langle x_i\rangle^2$.

— " —

A seguir mostraremos os procedimentos para obtenção de gráficos.